О РАСЧЕТЕ ВПАДИНЫ ЗА ПОДВОДНЫМ КРЫЛОМ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА И ПЛОСКОЙ ГЛИССИРУЮЩЕЙ ПЛАСТИНКОЙ

Л. А. Эпштейн *

На базе использования гипотезы плоских сечений дается решение задачи о впадине, образующейся за малопогруженным подводным крылом конечного размаха. Результаты расчетов длины и наибольшей глубины впадины удовлетворительно согласуются с экспериментом. Решение обобщается на случай плоской глиссирующей пластинки.

Различные аспекты вопросов теории глиссирования и подводного крыла, созданной в тридцатых годах трудами академиков М. В. Келдыша, Н. Е. Кочина, М. А. Лаврентьева и Л. И. Седова, продолжают интересовать науку и промышленность.

До сих пор расчет впадины за подводным крылом производился по полуэмпирическим формулам, полученным на базе теории размерностей и систематических опытов.

В настоящей заметке предлагается метод теоретического расчета формы диаметрального сечения впадины, образующейся за подводным крылом и плоской глиссирующей пластинкой.

При построении теории будем исходить из обычно принимаемых допущений:

1) будем считать справедливой гипотезу плоских сечений;

2) будем рассматривать достаточно малые возмущения свободной поверхности и достаточно большие числа Фруда, чтобы можно было моделировать подводное крыло схемой биплана.

Рассмотрим подводное крыло с хордой b и размахом l, движущееся на глубине h со скоростью v. За крылом образуется впадина с шириной, близкой к размаху крыла. При малых погружениях крыла поперечные сечения впадины близки к прямоугольным. С удалением от крыла впадина сужается и переходит в гребень.

Движение вдоль вертикали участка свободной поверхности длиной dx можно получить из условия (фиг. 1)

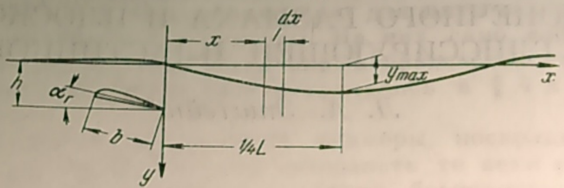
$$m\ddot{y} = Y_A, \tag{1}$$

где m — присоединенная масса элемента пластинки шириной l и протяженностью dx, Y_A — архимедова сила, действующая на элемент. При подсчете величины m будем исходить из известной теории Прандтля [3], согласно которой непрерывное давление крыла на встречаемые им

---

* Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского, Москва.

массы жидкости можно заменить мгновенным давлением крыла, как доски с размахом l и длиной, равной пройденному крылом пути. Учет того, что крыло погружено на некоторую глубину, произведем, считая



Фиг. 1.

его нижним крылом биплана с расстоянием $2h$ между крыльями. При этих предположениях

$$m = \frac{\pi\rho l^2}{4\varkappa_1}, \tag{2}$$

где функция $\varkappa_1(h/l)$ найдена Е. А. Федоровым [7]. Так как очевидно, что

$$Y_A = -\rho g l y \, dx, \tag{3}$$

то, подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$\ddot{y} + n^2 y = 0, \tag{4}$$

где

$$n = \sqrt{\frac{4g\varkappa_1}{\pi l}}. \tag{5}$$

Решением (4) будет

$$y = A\cos nt + B\sin nt. \tag{6}$$

Время, истекшее с момента прохождения крыла под элементом dx с координатой x, будет $t = x/v$; следовательно,

$$y = A\cos\frac{n}{v}x + B\sin\frac{n}{v}x. \tag{6'}$$

Одно из граничных условий для определения констант примем в виде: $y = 0$ при $x = 0$, откуда получим $A = 0$ и

$$y = B\sin\frac{n}{v}x = B\sin\frac{2\pi}{L}x. \tag{7}$$

Заметим, что произведенный расчет справедлив в пределах $x \sim {}^1/_4 L$, когда впадина имеет еще приблизительно параллельные края и ее сечения близки к прямоугольнику.

С учетом (7) и (5) найдем

$$\frac{\bar{L}}{4} = \sqrt{\frac{\pi^3}{16\varkappa_1}}\,\mathrm{Fr}\sqrt{\lambda}, \tag{8}$$

где

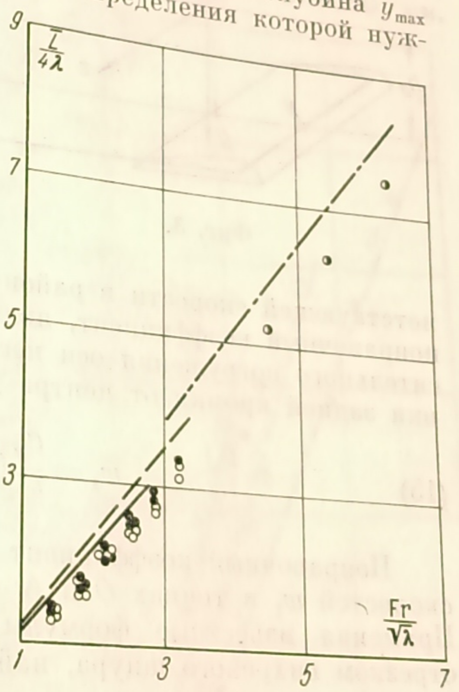
$$\bar{L} = \frac{L}{b}, \quad \lambda = \frac{l}{b}, \quad \mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gb}}. \tag{9}$$

На фиг. 2 приведено сопоставление расчета по (8) с результатами ...перимента [8] (обозначения те же, что на фиг. 4 — см. стр. 639). ...личина $\varkappa_1$ находилась по данным таблицы, заимствованной из [7].

Таблица

$100\frac{h}{l}$	$\varkappa_1$	$100\frac{h}{l}$	$\varkappa_1$	$100\frac{h}{l}$	$\varkappa_1$
0	2	10.9	1.450	39.3	1.137
3.46	1.715	18.5	1.308	55.7	1.080
4.02	1.695	23.0	1.256	92.1	1.038
4.78	1.658	28.1	1.204	143.4	1.032
5.88	1.610	32.2	1.175	225	1.022
7.67	1.540	35.8	1.153	374	1.004

Перейдем к расчету глубины впадины. Наибольшая глубина $y_{\max}$ ...гласно (7) будет равна постоянной B, для определения которой нуж... знать начальную скорость опуска... слоя у задней кромки крыла ... угол скоса потока в этой об...сти.



Фиг. 2.

Известно (см., например, [3]), что ...я крыла с эллиптическим распреде...нием нагрузки, движущегося в без...ничной жидкости, поверхность раз...ла опускается со скоростью

$$w = \frac{2C_y}{\pi\lambda} v_0.$$

...я подводного крыла прямоугольной ...рмы эта скорость возрастает за счет ...нения формы в плане и за счет ...планного эффекта» [7]. С учетом ...х поправок

$$w = \frac{2C_y}{\pi\lambda}(1+\tau)\varkappa_1 v.$$

...ля малых погружений крыла в первом приближении можно при...ть эту скорость начальной скорости опускания свободной поверх... и таким образом получить

$$\dot{y}|_{t=0} = Bn = \frac{2C_y}{\pi\lambda}(1+\tau)\varkappa_1 v.$$

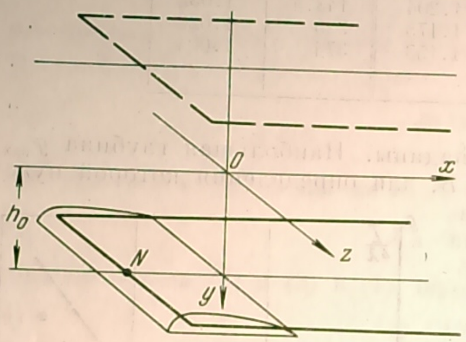
...оответствии с этой формулой угол наибольшего склона продоль...офиля впадины

$$\alpha_{\max} = \frac{2C_y}{\pi\lambda}(1+\tau)\varkappa_1,$$

а величина максимальной глубины впадины $y_{max} = B$, отнесенная к хорде крыла и к значению C_y, может быть с учетом формул (12) и (5) выражена в виде

$$\frac{y_{max}}{C_y} = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{\pi}\frac{\mathrm{Fr}}{\sqrt{\lambda}}}(1+\tau). \tag{14}$$

При использовании формулы (11) учитывалось, что, хотя индуцированная сбегающими вихрями скорость w_1 с приближением к крылу уменьшается, в этой области должны быть еще приняты во внимание скорости w_2, вызванные несущим вихрем. Суммарная вертикальная скорость в районе крыла $w = w_1 + w_2$ слабо зависит от координаты x, примерно соответствуя формуле (11), а для крыла в безграничной жидкости — формуле (10), и даже несколько возрастает с приближением к задней кромке (см., например, [1, 9]).



Фиг. 3.

Если погружение крыла не очень мало, то константу следует определить по вызванной вертикальной скорости на свободной поверхности в области над задней кромкой крыла.

Будем считать, что скорость w_1, вызванная в указанной области сбегающими вихрями, может быть выражена в виде произведения соответствующей скорости в районе центра давления крыла на некоторый поправочный коэффициент, являющийся функцией удлинения λ, относительного погружения оси несущего вихря $\bar{h}_1$ и безразмерного расстояния задней кромки от центра давления $\bar{b}_1$, т. е. положим

$$w_1 = \frac{C_y}{\pi\lambda}(1+\tau)\varkappa_1 f_1(\lambda, \bar{h}_1, \bar{b}_1). \tag{15}$$

Поправочный коэффициент f_1 найдем как отношение вертикальных скоростей w_1 в точках O и N (фиг. 3) при П-образной вихревой схеме. Применяя известные формулы для вычисления скорости, вызванной отрезком вихревого шнура, найдем

$$f_1 = \frac{w_{10}}{w_{1N}} \frac{1 + \dfrac{S}{\sqrt{1+S_1^2+S_2^2}}}{(1+S_2^2)\left(1+\dfrac{1}{1+4S_2^2}\right)}, \tag{16}$$

где

$$S_1 = 2\frac{\bar{b}_1}{\lambda}, \qquad S_2 = 2\frac{\bar{h}_1}{\lambda}. \tag{17}$$

Для вертикальной скорости w_2, вызванной в точке O несущими вихрями, аналогично получим

$$w_2 = \frac{C_y}{\pi\lambda}\frac{S_1}{S_1^2+S_2^2}\frac{1}{\sqrt{1+S_1^2+S_2^2}}. \tag{18}$$

...ким образом, вертикальная скорость на свободной поверхности над ...ней кромкой

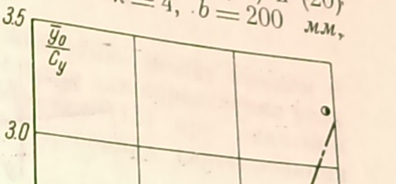
$$w = w_1 + w_2 = \frac{C_y}{\pi\lambda} f,$$

$$f = (1+\tau)\,\varkappa_1 \frac{1 + \dfrac{S_1}{\sqrt{1+S_1^2+S_2^2}}}{(1+S_2^2)\left(1+\dfrac{1}{1+4S_2^2}\right)} + \frac{S_1}{(S_1^2+S_2^2)\sqrt{1+S_1^2+S_2^2}}.$$

Окончательные формулы для определения $\alpha_{\max}$ и величины $y_{\max}/C_y$ ...мут теперь вид

$$\alpha_{\max} = \frac{C_y}{\pi\lambda} f, \qquad \frac{y_{\max}}{C_y} = \frac{f}{2\sqrt{\pi\varkappa_1}} \frac{\mathrm{Fr}}{\sqrt{\lambda}}.$$

На фиг. 4 результаты расчетов глубины по формулам (21) и (20) ...ставлены с данными эксперимента [8] (*1* — $\lambda = 4$, $b = 200$ *мм*, ...$= 0.2$, $\alpha_г = -1^\circ \div -6^\circ$; *2* — $\bar{h} = 0.7$, ...$= 0 \div 6^\circ$; *3* — $\lambda = 2$, $b = 62$ *мм*, ...$= 0.7$, $\alpha_г = 10^\circ$). При расчетах принято ...$= 0.75$. Расчеты для крыла с $\lambda = 4$ про...ведены для угла * $\alpha_г = 3^\circ$. Согласова...е расчета и эксперимента по опреде...нию глубины впадины оказывается ...ень хорошим, в то время как длина ...адины по расчету получается на 10—...% больше, чем в опытах (см. фиг. 2). ...о объясняется неучтенным в теории ...перечным смыканием впадины, пере...дящей затем в гребень. За счет попе...чного смыкания продольный профиль ...адины искажается и длина первой чет...рти волны несколько уменьшается, в ... время как глубина впадины почти не ...няется.



Фиг. 4.

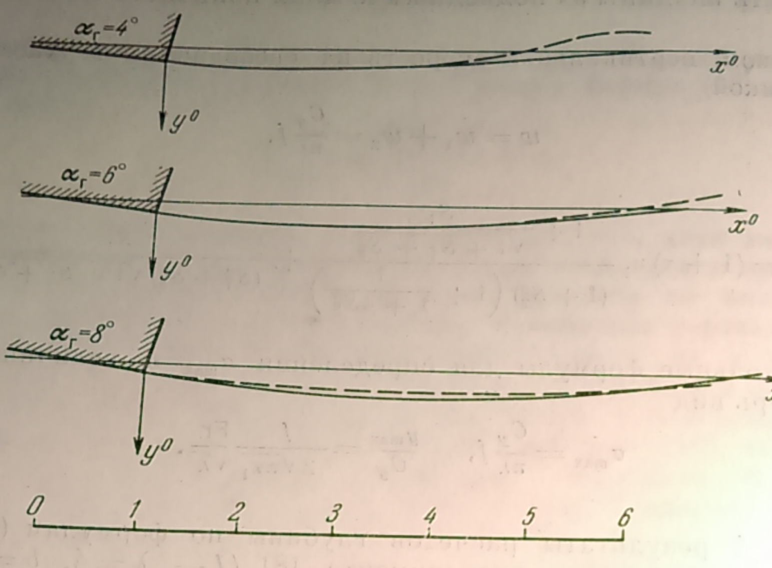
Расчет впадины за плоской глисси...ющей пластинкой, движущейся с боль...ими числами Фруда, может быть вы...лнен на основании аналогичных со...ражений в соответствии с уравне...ем (6).

Граничные условия для определения ...стант теперь примут вид: $y = h$, $\dot{y} = $ ...α при $x = 0$. Здесь h — осадка задней ...мки глиссирующей пластинки, а α — угол схода струй. Уравнение ...метрального сечения впадины получим в виде

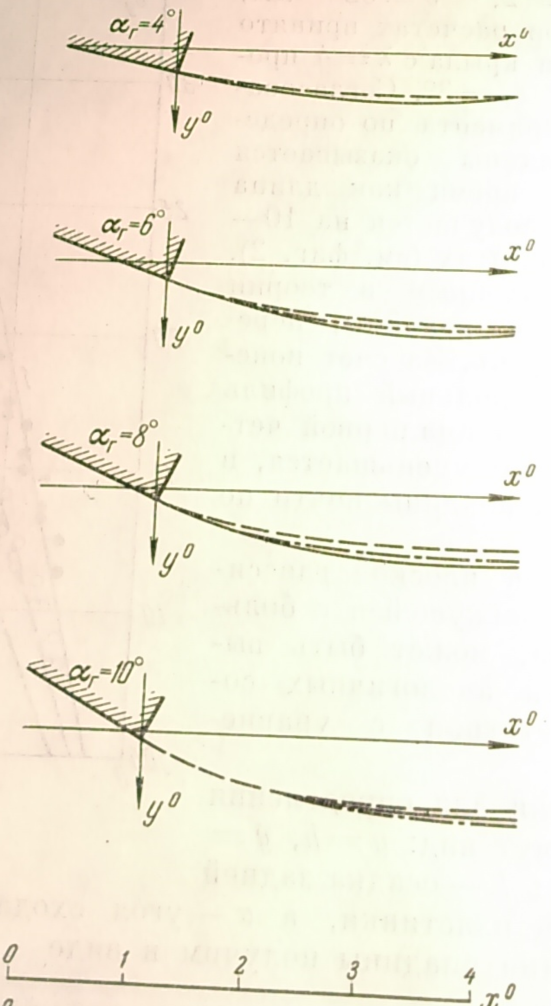
$$y = h\cos kx + \frac{\alpha}{k}\sin kx,$$

---

* Угол при фиксированном h определяет величину h_1.


αг=4°
x°
y°
αг=6°
x°
y°
αг=8°
x°
y°
0
1
2
3
4
5
6

Фиг. 5.


αг=4°
x°
y°
αг=6°
x°
y°
αг=8°
x°
y°
αг=10°
x°
y°
0
1
2
3
4
x°
0
1
y°

Фиг. 6.

$$k=\frac{n}{v}=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{1}{l\,\mathrm{Fr}_l}.$$

Для глиссирующей пластинки принято в качестве характерного ...йного размера выбирать ее ширину, т. е. в наших обозначениях l; ...ветственно вводится число Фруда $\mathrm{Fr}_l=v/\sqrt{gl}$. Будем обозначать ... безразмерные величины, отнесенные к l, индексом «0» (например, ...$=h^0$, $kl=k^0$). Заметим также, что под удлинением, как и для ...ла, будет пониматься отношение размаха пластинки (ширины) ...моченной длине (в работах по глиссированию удлинением часто ...вается обратная величина).

Для наибольшей глубины впадины y_{max} и ее расстояния x от зад... кромки пластинки получим из (22) формулы

$$y^0_{max}=\frac{\alpha}{k^0}\sqrt{1+\frac{k^0h^0}{\alpha}},\qquad x^0=\frac{1}{k^0}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k^0h^0}.$$

Л. И. Седов [4—5] отметил глубокую аналогию между крылом и ...ссирующей пластинкой. В соответствии с этим для определения угла ...да струй может быть использована формула (13) при значении ...=2. Вводя вместо C_y принятый при исследованиях глиссирования ...ффициент

$$C_B=\frac{2Y}{\rho v^2 l^2}=\frac{C_y}{\lambda},$$

...но написать *

$$\alpha=\frac{4}{\pi}C_B.$$

...мула (13), а следовательно и (25), справедлива при не слишком ...ых удлинениях. При малых λ можно считать, что угол схода струй ...вен геометрическому углу атаки пластинки $\alpha_г$. Если воспользоваться ...больших чисел Фруда известной формулой Л. И. Седова

$$\frac{C_B}{\alpha_г}=\frac{0.7\pi}{\lambda+1.4}$$

...есть, что угол схода струй не может быть больше угла атаки ...стинки, то можно получить, что условие $\alpha=\alpha_г$ следует применять ...$C_B/\alpha>{}^1/_4\pi$, т. е. при $\lambda<1.4$.

При малых смоченных длинах, т. е. при больших λ, формулы (24) ...но приближенно записать в виде

$$\frac{y^0_{max}}{C_B}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Fr}_l,\qquad x^0=\frac{\pi}{2k^0}-\frac{h^0}{\alpha}=\sqrt{\frac{\pi^3}{32}}\,\mathrm{Fr}_l-\frac{1}{\lambda}.$$

...поставление расчетов диаметрального сечения впадины за плоской ...ссирующей пластинкой с опытами приведено на фиг. 5—6. На фиг. 5

* Малую поправку τ учитывать не следует, так как передний контур смочен... ...верхности приближает ее форму к эллиптической.