106 стр.

Фо. 4
559085

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Московский ордена Трудового Красного Знамени
физико-технический институт

А.Б.Лотов

ГЛИССИРОВАНИЕ И БЫСТРЫЙ ВХОД ТЕЛ В ВОДУ

Утверждено Ученым советом института
в качестве учебного пособия

МОСКВА 1984

УДК 532.51

Лотов А.Б. Глиссирование и быстрый вход тел в воду:Учебное пособие.- М.: изд.МФТИ, 1984.- 108 с.

Настоящее пособие посвящено весьма важной проблеме гидродинамики - глиссированию и быстрому входу тел в воду. В работе отражены как классические, так и важнейшие результаты последних лет, опубликованные в различных статьях и монографиях. Изложенный материал может быть эффективно использован при изучении и исследованиях в области гидродинамики больших скоростей, глиссирования и погружения тел в жидкость.

Учебное пособие написано по курсу лекций, прочитанных автором для студентов факультета аэромеханики и летательной техники МФТИ. Оно предназначено для студентов и аспирантов МФТИ и механико-математических факультетов университетов.

Ил. 77, табл. 5, библиогр. 64 назв.

Рецензенты: академик Г.В.Логвинович
профессор Е.В.Тарасов

Ленинградский кораблестр. ин-т Научная библиотека

559085

Ленинградский кораблестр. ин-т Учебная библиотека

© Московский ордена Трудового Красного Знамени физико-технический институт, 1984

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание представляет собой учебное пособие по курсу лекций "Глиссирование и быстрый вход тел в воду", читавшихся доцентом А.Б.Лотовым на кафедре "Гидродинамики и аэроакустики" факультета аэромеханики и летательной техники МФТИ в 1970-78 гг.

В работе трактуется современное состояние очень важной и сложной проблемы гидродинамики - глиссирования и быстрого входа тел в воду. Отражены как классические, так и важнейшие результаты последних лет, опубликованные в различных статьях и монографиях.

Для пособия характерна доступность изложения, сочетающаяся с большой полнотой и глубиной освещения рассматриваемых вопросов. Теоретические выкладки сопровождаются практическими примерами, экспериментальными данными, историческими обзорами и ссылками на первоисточники.

Эти лекции могут служить ценным пособием при подготовке специалистов в области гидродинамики больших скоростей, полезным справочным материалом для студентов и аспирантов, занимающихся вопросами глиссирования и погружения тел в жидкость.

Окончанию работы над пособием А.Б.Лотову помешала тяжелая болезнь и безвременная кончина. По предложению руководства гидродинамического отделения ЦАГИ работу закончили его ученики.

Введение и глава I были подготовлены к печати самим А.Б.Лотовым.

Главы II, III и § 1 главы IV подготовлены к печати Л.Д.Коврижных, а § 2, 3 и 4 главы IV - В.П.Соколянским.

Научное редактирование пособия осуществлено Л.А.Эпштейном и М.Ю.Цейтлиным.

Академик АН УССР Г.В.ЛОГВИНОВИЧ

Андрей Борисович ЛОТОВ

Андрей Борисович Лотов родился 31-го июля 1908 г. в г. Москве. По окончании в 1925 г. средней школы он поступает на физико-математический факультет Московского государственного университета и заканчивает его в 1930 г. по специальности аэро- и гидродинамика.

В ЦАГИ Андрей Борисович начал работать с 1931 г. Руководил группой по проектированию и расчету лодок и поплавков гидросамолетов, а затем также группой аэродинамики и веса. Андрей Борисович непосредственно участвовал в проектировании летающих лодок и в исследованиях их моделей в гидроканале ЦАГИ. В то время создание тяжелых гидросамолетов и обеспечение им высоких гидродинамических качеств представляло собой новую сложную научно-техническую задачу, которая была успешно решена. Работы А.Б.Лотова по разработке методов гидростатического и гидродинамического расчетов гидросамолетов нашли свое отражение в соответствующих разделах опубликованного в 1938 г. "Справочника авиаконструктора", который являлся первым систематизированным руководством для конструкторов. В 1934 г. в Трудах ЦАГИ вып.152 была опубликована первая научная работа Андрея Борисовича "Об ударе упругой пластины о поверхность жидкости". Эта работа докладывалась девятого декабря 1933 г. на руководимом С.А.Чаплыгиным семинаре общетеоретической группы (ОТГ) ЦАГИ.

В 1936 г. А.Б.Лотов поступил в аспирантуру. Его научным руководителем был Н.Е.Кочин. 27 июня 1942 г. в Институте Механики АН СССР состоялась успешная защита А.Б.Лотовым его диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В 1943 г. ВАК присвоил ему звание старшего научного сотрудника. В 1940 г. Андрей Борисович вновь работает в ЦАГИ. В этот период им были выполнены систематические исследования по влиянию сжимаемости на устойчивость самолетов, по аэродинамике самолетов с тормозными щитками, по стреловидным оперениям, форме носков рулей, различным типам аэродинамической компенсации рулей и элеронов. А.Б.Лотов ввел в практику этих исследований тензометрические измерения, что существенно повысило их точность. Соответствующие работы были опубликованы в изданиях ЦАГИ совместно с Г.П.Свищевым, А.Ж.Рекстиным, В.Г.Ждановым, В.Г.Микеладзе и др. Обобщающие работы по всем этим вопросам были опубликованы в 1949 г. в Трудах ЦАГИ и в 1953 г. в трех выпусках "Руководства для конструкторов". За эти работы А.Б.Лотов был удостоен звания лауреата Государственной премии. Андрей Борисович как ведущий инже-

нер по ОКБ Генерального конструктора С.В.Ильюшина провел большие исследования аэродинамики широко известных пассажирских самолетов ИЛ-12, ИЛ-14 и ИЛ-18. В натурной аэродинамической трубе А.Б.Лотовым были впервые проведены исследования первого отечественного самолета со стреловидным крылом.

В 1954 г. А.Б.Лотов был выдвинут на должность начальника гидродинамической лаборатории ЦАГИ, которой он руководил до конца своей жизни.

Гидродинамическая лаборатория является ведущей организацией Советского Союза в области скоростной гидродинамики. Значительному расширению ее экспериментальных возможностей и научной тематики способствовало создание при А.Б.Лотове ряда новых экспериментальных установок и базы полунатурных испытаний. Лаборатория под руководством Андрея Борисовича Лотова провела ряд успешных исследований, связанных с созданием новейших образцов техники для авиации и флота СССР.

Наряду с руководством лабораторией Андрей Борисович вел самостоятельную научную работу и активно участвовал в отработке новых объектов промышленности. В деятельности А.Б.Лотова как ученого и руководителя характерны тесная связь научных исследований с запросами практики, глубокое проникновение в существо исследуемых проблем, сочетание теоретических и экспериментальных методов исследования. Все это обеспечило Андрею Борисовичу авторитет среди работников промышленности и НИИ.

Наряду с активной научно-производственной деятельностью во все периоды своей жизни Андрей Борисович уделял большое внимание подготовке кадров, с 1941 г. он вел педагогическую работу в ВУЗах: читал лекции по теоретической гидродинамике в КАИ, по аэродинамике самолета на механико-математическом факультете в МГУ, лекции по аэродинамическому расчету и устойчивости самолетов на факультете аэр физики МФТИ. С участием А.Б.Лотова в 1970 г. была организована сп циальность гидродинамики на ФАЛТ МФТИ, где им читался публикуемый ниже курс лекций по глиссированию и удару о воду.

Член ученого совета ЦАГИ Андрей Борисович являлся организатором и участником ряда научных конференций по гидродинамике.

С 1949 г. А.Б.Лотов является членом КПСС. Он активно участвовал в общественной и партийной работе, являлся делегатом ряда районных партконференций, председателем районной избирательной комиссии, членом партийного бюро.

Научная, организаторская, педагогическая и общественная деятельность А.Б.Лотова была высоко оценена Партией и Правительством – он был награжден орденами Ленина, Трудового Красного Знамени, Красной Звезды, медалями и грамотой Президиума Верховного Совета РСФСР. А.Б.Лотов являлся дважды лауреатом Государственных премий.

В личной жизни Андрей Борисович был простым, душевным, доброжелательным человеком высокой культуры. Он хорошо знал классическую музыку и живопись, играл на рояле, сам рисовал и любил русскую природу. Прекрасно знал литературу и историю, был хорошим рассказчиком. Его доброта и отзывчивость способствовали сближению с людьми и снискали ему многих друзей.

Часть I. ГЛИССИРОВАНИЕ

Введение

Глиссированием называется движение судна с большими скоростями, когда значительная часть его подъемной силы создается динамическими давлениями, действующими на смоченную поверхность днища. При этом резко уменьшается площадь смоченной поверхности судна, а с ним и сопротивление трения. С целью еще большего уменьшения площади поверхности трения активная часть днища ограничивается по бокам резко очерченными скулами, а по длине реданами. На рис. I-3 показаны фотографии глиссирующей модели поплавков гидросамолета, испытываемой в опытовом бассейне, при постепенном увеличении скорости. Видно, что впереди глиссирующей поверхности жидкость совершенно спокойна. Затем, при наезде поплавков, происходит чрезвычайно резкое ее ускорение. При этом по передней кромке возникают тонкие брызговые струи, которые с большой скоростью отбрасываются вперед и в стороны. Обтекание основной части днища носит правильный струйный характер.

С редана происходит срыв, и в жидкости образуется впадина. Для получения возможно большей подъемной силы днищу придается почти плоская горизонтальная форма. С целью смягчения ударов о встречную волну, особенно для гидросамолетов при взлете и посадке, приходится днищу придавать килеватость; по мере приближения к носу килеватость увеличивается. При плавании, а также при движении с малыми скоростями глиссеры и гидросамолеты ведут себя как водоизмещающие суда, у которых подъемная сила создается гидростатическими давлениями. Необходимая ее величина обеспечивается достаточной высотой бортов. При этом смоченная поверхность значительна. Это приводит к быстрому росту сопротивления трения со скоростью. Придание резких изломов бортов в местах сопряжения с днищем (скулы и реданы) способствует возможно более раннему отрыву жидкости от бортов и снижению сопротивления трения.

Первые попытки научного изучения глиссирования относятся к периоду 1912-1914 годов [I], однако серьезное развитие этих работ началось с конца 20-х и начала 30-х годов.

Систематические экспериментальные исследования на "глиссирующих пластинах" впервые были, видимо, проведены Зотторфом (Гамбург) в период 1929-32 гг. [2]. Первоначально это были плоские пластинки, затем их поперечным сечениям придавались килеватость и искривление. Такого рода модели обеспечивали простоту анализа вследствие возможности отделения в расчете сопротивления трения от сил давления. Конечно, наряду с пластинами, в опытовых бассейнах (гидроканалах) производились испытания моделей глиссеров и поплавков гидросамолетов, однако такие испытания носили утилитарный характер и не были удобны для анализа эксперимента.

Первые систематические испытания глиссирующих пластин в нашей стране были выполнены К.Ф.Косоуровым, Н.С.Володиным и К.П.Харитоновым (Ленинград). Результаты их испытаний были доложены на I Всесоюзной конференции по гидродинамике в 1933 г. в Москве [3], [4]. Вскоре после пуска Московского гидроканала ЦАГИ в 1930 г. там были поставлены систематические испытания серий пластин и моделей лодок гидросамолетов и глиссеров. Важнейшие результаты этих испытаний опубликованы во II томе Справочника авиаконструктора ЦАГИ в 1938 г. [5].

В 1940 г. Л.А.Эпштейном в ЦАГИ были проведены обширные, подытоживающие испытания плоских пластин [6], [7]. При этих испытаниях впервые было установлено существование режимов глиссирования, когда пластина располагается выше невозмущенного уровня воды. Это явление приводит к гистерезису зависимости подъемной силы от погружения пластины при фиксированном угле атаки.

Основы теории глиссирования заложены Г.Вагнером. Они изложены в его статьях [8] и [9], опубликованных в 1930-32 гг. и содержат весьма широкий аспект идей, относящихся как к плоской, так и пространственной задачам глиссирования. Вагнером впервые предложено решение нелинейной плоской задачи (без учета весомости воды) и метод аналогии с крылом, распространяющийся и на пространственную задачу.

Постановка плоской нелинейной задачи была следующей: по поверхности бесконечно глубокой невесомой жидкости глиссирует со скоростью V_0 плоская пластина, длина которой в верхнем конце не ограничена (см. рис. 4). Пластина установлена под углом атаки α. Поток, натекающий на пластину, раздваивается: вперед отделяется тонкая брызговая струйка толщиной δ, которая течет, не отделяясь от пластины.

Длиной пластины l (см. рис. 4) условно называется расстояние от ее задней кромки до точки пересечения перпендикулярной к пластине касательной к свободной поверхности. В нашей стране плоскую задачу о глиссировании плоской пластины в невесомой жидкости впервые разрешили М.И.Гуревич и А.Р.Янпольский под руководством С.А.Чаплыгина в 1933 г. [10]. Постановка задачи была следующая:

по свободной поверхности невесомой жидкости глиссирует со скоростью V_0 плоская пластинка заданной длины l под углом атаки α (см. рис. 5). Поток, натекающий на пластинку в передней ее части раздваивается. Отделяющаяся тонкая брызговая струйка отбрасывается вперед. Угол β касательной к ней на бесконечности с горизонтом задан.

Задача была решена как для бесконечно глубокой жидкости, так и для жидкости конечной глубины. В частном случае, когда струйка направлена вдоль пластины ($\beta = \alpha$), эта задача совпадает с вагнеровской. Задача Чаплыгина-Вагнера имела фундаментальное значение. Она правильно описывала картину потока вблизи пластины, распределения по ней скоростей и давлений, подъемную силу и брызговое сопротивление. В части формы свободной поверхности получился, однако, парадоксальный, расходящийся с наблюдениями результат: по мере удаления от пластины свободная поверхность неограниченно понижалась, так что расстояние ее точек по высоте от пластины росло как $\ln|x|$.

Причинами такого аномального поведения могли быть неучет влияния весомости воды, глубины русла, конечной ширины пластины.

Решение задачи с глиссированием пластины по поверхности тяжелой жидкости впервые удалось получить Л.И.Седову в 1936 г. Задача ставилась как линейная; угол атаки считался малым, граничные условия на пластине и свободной поверхности сносились на отрезки горизонтальной оси Ox. Был использован новый метод, только что предложенный М.В.Келдышем для исследования движения тяжелой жидкости с изолированным вихрем [11]. Работа Л.И.Седова была доложена в мае 1936 г. на конференции по теории волнового сопротивления ЦАГИ и была опубликована в трудах этой конференции [12].

Вслед за Л.И.Седовым задача в аналогичной постановке, но другим методом, была решена Н.Е.Кочиным в 1938 г. [13].

И Седов, и Кочин получили решения в виде разложений по малому параметру ν

$$\nu = \frac{gl}{2V_0^2} = \frac{1}{2Fr_l^2}, \qquad (Fr_l \text{ - число Фруда по смоченной длине})$$

и определили первые члены этих разложений. Важнейший результат их исследований заключался в том, что подъем пластины относительно невозмущенного горизонтального уровня воды является конечным, зависящим от величины числа Фруда; с увеличением его подъем возрастает как $\ln Fr_l$.

Метод Л.И.Седова допускал приближенный расчет характеристик пластины не только при малых, но вообще при произвольных значениях ν. Такие расчеты в широкой области значений числа Фруда, начиная с $F_{\tau} = 0$ (плавание), были выполнены Ю.С.Чаплыгиным [I4]. Им, в частности, было установлено, что с ростом числа Фруда ($F_{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$) при $F_{\tau} >$ I,9 задняя кромка поднимается выше невозмущенного уровня в соответствии с результатами работ [6], [7].

Недавно подобные расчеты с более высокой точностью, с применением ЭВМ, были произведены М.Н.Николаевым [I5]. Они подтвердили результаты Ю.С.Чаплыгина.

В последнее время Н.Н.Риспиным [I6] и Я.Т.Ву [I7] было предложено приближенное решение нелинейной задачи глиссирования пластины в тяжелой жидкости методом сращиваемых асимптотических разложений (это решение приводится также в работе К.В.Рождественского [I8]).

Течение жидкости условно разбивается на две области: внутреннюю - вблизи пластины и внешнюю - вдали от нее. В каждой из этих областей строятся свои асимптотические разложения.

Во внутренней области, где преобладают инерционные силы над весомостью, берется рассмотренное выше решение [I0]. В качестве решения для внешней области, где преобладает влияние весомости, используется решение задачи о гравитационных волнах, вызванных вихреисточником, движущимся по свободной поверхности. После сращивания обоих разложений по определенным правилам в области "общей пригодности" получается равномерно пригодное во всем потоке, единственное решение задачи. В этой постановке угол атаки не ограничен, и может быть задана глубина погружения.

Решение нелинейной задачи в потоке ограниченной глубины было получено еще в 1933 г. [I0]. Дальнейшие исследования и конкретные расчеты содержатся в работе Ю.С.Чаплыгина [I9] и Грина [20].

Показано, что по мере уменьшения глубины потока подъемная сила глиссирующей пластины возрастает.

Для решения пространственной задачи глиссирования было предложено две теории, исходящие из различных предпосылок.

Первая теория - "метод аналогии с крылом" (Г.Вагнер [8], Л.И.Седов [2I]). Основное допущение заключается в том, что глиссирующее тело считается слабо килеватым и его угол атаки принимается достаточно малым, так что задачу можно линеаризировать, снося граничные условия на пластине и свободной поверхности на плоскость - невозмущенную свободную поверхность жидкости. Влиянием весомости пренебрегается. Устанавливается, что поток, обтекающий глиссирующую пластину совпадает, за исключением малой области около носка, с нижней частью неограниченного потока, обтекающего тонкое крыло той же конфигурации. Основная трудность здесь заключается в определении размеров смоченной поверхности глиссера в передней части, в области подпора. Первоначально эту площадь определяли на основании экспериментальных данных, например [7].

Метод теоретического расчета этой площади предложен М.Г.Щегловой в 1959 г. [22]. Ее приближенные расчеты показали качественное совпадение с результатами эксперимента. В частности, они подтвердили существование режимов глиссирования со всплыванием вследствие подпора всей пластины над невозмущенным уровнем воды.

Вторая теория глиссирования - метод "плоских поперечных сечений" был предложен профессором Г.Е.Павленко в 1932 г. [23]. Метод плоских сечений годится только для достаточно сильно вытянутых в длину корпусов.

Движение жидкости считается происходящим в фиксированных в пространстве поперечных плоскостях, где оно порождается погружением соответствующих отсеков данного тела, пронизывающего указанные поперечные плоскости. Движение жидкости и силы, действующие в каждом сечении, вычисляются по известной теории быстрого входа тел в воду (см. 4.II). Достоинством метода плоских сечений является его пригодность для интересующих практику поверхностей со значительной килеватостью.

В нашей стране метод плоских сечений был разработан, главным образом, трудами Г.В.Логвиновича [24], А.И.Тихонова и Г.К.Колосова [25], Л.Д.Коврижных [26], [27] и В.П.Соколянского [28].

Развитие работ по нестационарному глиссированию и устойчивости глиссирования будет описано ниже в главе 3.

Глава I. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ГЛИССИРОВАНИИ

I. Нелинейная задача Вагнера-Чаплыгина

Рассмотрим глиссирование плоской пластины по поверхности невесомой жидкости. Предположим, кроме того, что жидкость однородная, несжимаемая и лишенная вязкости; движение невихревое, жидкость бесконечно глубокая.

Рассмотрим обращенное движение, когда пластина неподвижна, а жидкость натекает на нее под углом атаки α со скоростью V. Отнесем его к системе осей координат xBy (см. рис. 6). Примем, что начало координат B совпадает с глиссирующим ребром пластины – ее задней кромкой. Сама пластина располагается по отрицательной полуоси x.

Бесконечно далеко впереди пластины жидкость имеет скорость V_0 и направлена под углом α к оси x. В критической точке C пластины поток раздваивается. Его основная часть обтекает участок пластины CB и далее образует свободную поверхность BH (поверхность постоянного – атмосферного давления $\bar{p}_0$). Угол ее наклона относительно оси X на бесконечности стремится к α. Тонкий слой жидкости впереди точки C поворачивает вперед, образуя "брызговую струю", толщина ее стремится к постоянной величине δ при $|x| \longrightarrow \infty$ (в передней части пластины). Смоченной длиной пластины BE' будем называть отрезок BE' – расстояние от глиссирующей кромки B до нормальной проекции на пластину точки поворота свободной поверхности жидкости E.

Ниже излагается решение задачи методом конформных отображений в варианте Н.Е.Жуковского.

Введем комплексный потенциал скоростей W

$$W = \varphi + i\psi,\tag{I.I}$$

где $\varphi = \varphi(x, y)$ потенциал скоростей течения, $\psi = \psi(x, y)$ – функция тока, определяющая расход жидкости. Примем, что в точке C $W = 0$. На рис. 7 изображается область течения в плоскости φ, ψ. Характерные точки течения B, C, A, E, H в этой области будем обозначать теми же буквами, как и на рис. 6. Как видим, она имеет вид полуплоскости с разрезом по вещественной оси φ. Введем комплексную функцию ω

$$\omega = \ln\left(V_0 \frac{dz}{dW}\right) = \tau + i\theta ,\tag{I.2}$$

где $\tau = \ln\left(\frac{V_0}{V}\right)$, V – модуль скорости, θ – ее аргумент. В бесконечно удаленной точке основной части жидкости, очевидно, $V = V_0$,

$\theta = \alpha$. На рис. 8 изображена область течения в координатах τ, θ. Как видно, она представляет собой полуполосу.

Отобразим область течения на верхнюю полуплоскость комплексного переменного t с таким соответствием точек, как показано на рис. 9. Поверхность глиссирующей пластины отобразим на вещественную отрицательную полуось t; свободную поверхность – на вещественную положительную полуось t.

Задача определения течения жидкости сводится к отысканию конформных отображений областей W (рис. 7) и ω (рис. 8) на верхнюю полуплоскость t (рис. 9). Так как области течения в плоскостях W и ω имеют вид многоугольников, точнее – треугольников, задача решается известными формулами Шварца-Кристоффеля. Например, для функции W будем иметь

$$\frac{dW}{dt} = C(t-t_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(t-t_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}(t-t_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1};\tag{I.3}$$

C – некоторая постоянная; I,2,3 – индексы вершин треугольника в плоскости W; α_1, α_2, α_3 – углы между сторонами треугольника в соответствующих точках.

Для области W (рис. 8) вершинами треугольника являются точки A,C,H. Точке A соответствуют значения $t_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$; точке C – $t_2 = -1$, $\alpha_2 = 2\pi$; точке H – $t_3 = h$, $\alpha_3 = -\pi$*.

В результате получаем

$$\frac{dW}{dt} = C\frac{t+1}{(t-h)^2 t}.$$

Для определения постоянной C используем условие, что при обходе точки A по контуру EAC (см. рис. 7)

$$\Delta\psi = -V_0\delta,\ \Delta\varphi = 0,\ \Delta W = -\delta V_0 i,$$

$\Delta W = C\int_\varepsilon \frac{(t+1)dt}{(t-h)^2 t}$, где знак интеграла $\int_\varepsilon$ обозначает интегрирование по полуокружности радиуса ε с центром в точке $t = 0$ (рис.9). Полагая $\varepsilon \longrightarrow 0$, получим $\Delta W = -\delta V_0 i = C\frac{\pi}{h^2} i$, так что $C = -\frac{\delta V_0 h^2}{\pi}$ и

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\delta V_0 h^2}{\pi}\frac{t+1}{(t-1)^2 t}.\tag{I.4}$$

Совершенно аналогично выполняем отображение области потока в плоскости ω (рис. 8) на верхнюю полуплоскость t (рис. 9). В качестве характерных точек берем точки A,B,C:

$A \quad t_1 = 0,\ \alpha_1 = \frac{\pi}{2},\ \frac{\alpha_1}{\pi} - 1 = -\frac{1}{2},$

$B \quad t_2 = \infty,\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2},\ \frac{\alpha_2}{\pi} - 1 \quad -\frac{1}{2},$

*) Из условия, что сумма углов треугольника равна π

$$\alpha_3 = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2) = -\pi.$$

C $\quad t_3=1$, $\alpha_3=0$, $\frac{\alpha_3}{\pi}-1=-1$.

При этом из формулы (I.3) следует

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{D}{(t+1)\sqrt{t}} \quad \text{и} \quad \omega=D\int^{t}\frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}}+F, \text{ где}$$

D, F некоторые постоянные, подлежащие последующему определению. Для выполнения интегрирования делаем подстановку $t=u^2$

$$\omega=2D\int^{u}\frac{du}{u^2+1}+F=Di\ln\left(\frac{\sqrt{t}+i}{\sqrt{t}-i}\right)+F.$$

Определим постоянные D, F:

В точке B ($t\longrightarrow\infty$) имеем $\omega=0$ (рис. 8), откуда получаем $F=0$. Рассмотрим поведение функции ω в окрестности точки $t=0$ (точка A). Из рис. 10 видно, что в плоскости $u=\sqrt{t}$ $(t>0)$

$$\sqrt{t}+i=\sqrt{|t+1|}\cdot e^{i(\frac{\pi}{2}-\sigma)}$$

$$\sqrt{t}-i=\sqrt{|t+1|}\cdot e^{-i(\frac{\pi}{2}-\sigma)}$$

$$\frac{\sqrt{t}+i}{\sqrt{t}-i}=e^{i(\pi-2\sigma)}$$

При подходе к точке A ($t\longrightarrow0$) $\sigma\longrightarrow0$ и $\frac{\sqrt{t}+i}{\sqrt{t}-i}\longrightarrow e^{i\pi}$;

$\omega\longrightarrow Di(i\pi)=-\pi D$. Но в точке A $\omega=\pi i$ (рис. 8), поэтому $D=-i$ и

$$\omega=\ln\left(\frac{\sqrt{t}+i}{\sqrt{t}-i}\right). \qquad (I.5)$$

Поскольку по определению $\omega=\ln\left(V_0\frac{dz}{dW}\right)$,

$$\frac{dz}{dW}=\frac{1}{V_0}e^{\omega}=\frac{1}{V_0}\cdot\frac{\sqrt{t}+i}{\sqrt{t}-i}. \qquad (I.6)$$

Теперь можно определить пока неизвестные координаты точек E и H в плоскости t (рис. 9). Согласно рис. 8 в точке E

$$\omega=i\frac{\pi}{2}$$

$$e^{\omega}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i=\frac{\sqrt{t_E}+i}{\sqrt{t_E}-i}, \qquad \text{откуда } t_E=1.$$

В точке H (рис. 8)

$\omega=i\alpha$ и $t=h$. (рис. 9).

По формуле (I.5)

$$i\alpha=\ln\left(\frac{\sqrt{h}+i}{\sqrt{h}-i}\right).$$

Из рис. 10 видно, что комплексные числа

$$\sqrt{h}+i=\sqrt{h+1}\,e^{i(\frac{\pi}{2}-\sigma_H)}$$

$$\sqrt{h}-i=\sqrt{h+1}\,e^{-i(\frac{\pi}{2}-\sigma_H)}$$

$$\frac{\sqrt{h}+i}{\sqrt{h}-i}=e^{i(\pi-2\sigma_H)}, \text{ так что}$$

$$i\alpha=\pi i-2\sigma_H i; \quad \sigma_H=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},$$

но $\operatorname{tg}\sigma_H=\sqrt{h}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$,

так что $\quad h=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. $\qquad$ (I.7)

Возвращаемся к решению основной задачи – определению потока, обтекающего глиссирующую пластину.

Итак, мы нашли, что

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{\delta V_0 h^2}{\pi}\,\frac{t+1}{(t-h)^2 t} \qquad (I.4)$$

и

$$\frac{dz}{dW}=\frac{1}{V_0}\,\frac{\sqrt{t}+i}{\sqrt{t}-i}, \qquad (I.6)$$

где $h=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. $\qquad$ (I.7)

Определим зависимость z в функции t. Можно написать, что

$$dz=\frac{dz}{dW}\cdot\frac{dW}{dt}\cdot dt.$$

Подставляя в правую часть известные выражения (I.6) и (I.4), получим

$$dz=-\frac{\delta h^2}{\pi}\cdot\frac{(\sqrt{t}+i)^2}{(t-h)^2 t}\,dt.$$

Делая подстановку $\sqrt{t}=u$, получим (I.8)

$$dz=-\frac{2\delta h^2}{\pi}\cdot\frac{(u+i)^2\,du}{(u^2-h)^2\cdot u}. \qquad (I.9)$$

Разложим правую часть на элементарные дроби

$$dz=-2\frac{\delta h^2}{\pi}\left\{\frac{A_1}{(u-\sqrt{h})^2}+\frac{A_2}{u-\sqrt{h}}+\frac{B_1}{(u+\sqrt{h})^2}+\frac{B_2}{u+\sqrt{h}}+\frac{C}{u}\right\}du,$$

где

$$A_1=\frac{h+2i\sqrt{h}-1}{4h\sqrt{h}}; \qquad B_1=\frac{h-2i\sqrt{h}-1}{-4h\sqrt{h}};$$

$$A_2=-\frac{i\sqrt{h}-1}{2h^2}; \qquad B_2=\frac{i\sqrt{h}+1}{2h^2};$$

$$C=-\frac{1}{h^2}.$$

Подставляя выражения A_1, A_2, B_1, B_2, C и интегрируя выражение (I.9) для dz в пределах от $u=\infty$ (точка B) до u, получим

$$Z=\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{h(h-1+2iu)}{u^2-h}+i\sqrt{h}\cdot\ln\left(\frac{u-\sqrt{h}}{u+\sqrt{h}}\right)+\ln\frac{u^2}{u^2-h}\right]. \qquad (I.I0)$$

На поверхности глиссирующей пластины (см. рис. II) имеем $u=i\eta$, где η – вещественное положительное число

$$z=\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{h(h-1-2\eta)}{-(\eta^2+h)}+i\sqrt{h}\cdot\ln\left(\frac{i\eta-\sqrt{h}}{i\eta+\sqrt{h}}\right)+\ln\frac{\eta^2}{\eta^2+h}\right].$$

Второй член правой части – вещественное число, что легко устанавливается с помощью рис. II, из которого видно, что

$$\ln\left(\frac{i\eta-\sqrt{h}}{i\eta+\sqrt{h}}\right)=2i\sigma,$$

где $tg\,\sigma=\frac{\sqrt{h}}{\eta}$. Итак, на глиссирующей пластине будем иметь $(x<0)$

$$-x=\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{h(h-1-2\eta)}{\eta^2+h}+2\sqrt{h}\,arctg\left(\frac{\sqrt{h}}{\eta}\right)+\ln\frac{\eta^2+h}{\eta^2}\right], \qquad (I.II)$$

где $h=ctg^2\frac{\alpha}{2}$. В частности, для критической точки С имеем $\eta_c=$ = I и

$$-x_c=\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{h(h-3)}{h+1}+2\sqrt{h}\,arctg(\sqrt{h})+\ln(h+1)\right]. \qquad (I.I2)$$

Для определения формы свободной поверхности возвратимся опять к уравнению (I.I0), в котором переменное u будем считать вещественным положительным числом (см. рис. II). Разделяя вещественную и мнимую части, получим параметрические уравнения свободной поверхности. Здесь нужно рассматривать два случая, в зависимости от того, будет ли u больше или меньше $\sqrt{h}$. Если $u>\sqrt{h}$ (участок свободной поверхности ВН, см. рис. 6),

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{h(h-1)}{u^2-h}+\ln\frac{u^2}{u^2-h}\right]\\ y&=\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{2uh}{u^2-h}+\sqrt{h}\ln\frac{u+\sqrt{h}}{u-\sqrt{h}}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (I.I3)$$

Если $u<\sqrt{h}$,

$$u-\sqrt{h}=(\sqrt{h}-u)e^{\pi i},$$
$$\ln(u-\sqrt{h})=\ln(\sqrt{h}-u)+\pi i,$$
$$\ln(u^2-h)=\ln(h-u^2)+\pi i,$$

и уравнения свободной поверхности (участок АЕН, рис. 6)

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\delta}{\pi}\left[-\frac{h(h-1)}{h-u^2}-\pi\sqrt{h}+\ln\frac{u^2}{h-u^2}\right]\\ y&=-\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{2hu}{h-u^2}+\sqrt{h}\cdot\ln\frac{\sqrt{h}+u}{\sqrt{h}-u}+\pi\right]\end{aligned}\right\} \qquad (I.I4)$$

С помощью последних уравнений определим точку поворота струи перед пластиной Е: полагая u = I, найдем

$$\left.\begin{aligned} -x_E&=l=\frac{\delta}{\pi}\left[h+\pi\sqrt{h}+\ln(h-1)\right]\\ -y_E&=\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{2h}{h-1}+\sqrt{h}\cdot\ln\frac{\sqrt{h}+1}{\sqrt{h}-1}+\pi\right]\end{aligned}\right\}. \qquad (I.I5)$$

Поскольку $h=ctg^2\frac{\alpha}{2}$, получаем

$$l=\frac{\delta}{\pi}\left[ctg^2\frac{\alpha}{2}+\pi\,ctg\frac{\alpha}{2}+\ln\left(ctg^2\frac{\alpha}{2}-1\right)\right], \qquad (I.I6)$$

то есть уравнение, связывающее толщину брызговой струйки со смоченной длиной пластины.

При малых углах α

$$\delta\approx\pi l\,tg^2\frac{\alpha}{2} \qquad (I.I7)$$

или

$$\delta\approx\frac{\pi l}{4}\alpha^2, \qquad (I.I8)$$

то есть малая величина второго порядка.

Определим понижение уровня свободной поверхности воды позади пластины на бесконечном удалении от нее.

Повернем оси координат (рис. 6) xBy на угол α против часовой стрелки. При этом в повернутой системе координат x_1By_1 ось Bx_1 будет параллельна невозмущенной свободной поверхности, а координата z_1 любой точки течения определится равенством

$$z_1=\frac{\delta}{\pi}e^{-i\alpha}\left[\frac{h(h-1+2iu)}{u^2-h}+i\sqrt{h}\cdot\ln\frac{u-\sqrt{h}}{u+\sqrt{h}}+\ln\frac{u^2}{u^2-h}\right].$$

Подставляя в это равенство значения $u=\sqrt{h}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, получим координаты x_1 и y_1 точек свободной поверхности ВН. Считая, что ε – малая величина и сохраняя слагаемые только порядков $\frac{1}{\varepsilon}$ и $\ln\varepsilon$, получим

$$z_1\approx\frac{\delta}{\pi}e^{-i\alpha}\left[\frac{\sqrt{h}}{2\varepsilon}(\sqrt{h}+i)^2+i(\sqrt{h}+i)\ln\varepsilon\right].$$

Рассмотрим в плоскости u число

$$\sqrt{h}+i=re^{\beta i}.$$

Здесь $r=\sqrt{h+1}$; $tg\,\beta=\frac{1}{\sqrt{h}}=tg\frac{\alpha}{2}$, $\beta=\frac{\alpha}{2}$,

следовательно $\sqrt{h}+i=\sqrt{h+1}\,e^{i\frac{\alpha}{2}}$

$$z_1\approx\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{\sqrt{h}}{2\varepsilon}(h+1)+\sqrt{h+1}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\ln\varepsilon\right].$$

559085

Разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$x_1\approx\frac{\delta}{\pi}\left[\frac{\sqrt{h}(h+1)}{2\varepsilon}+\sqrt{h+1}\,\sin\frac{\alpha}{2}\ln\varepsilon\right],$$

$$y_1 \approx \frac{\delta}{\pi}\sqrt{h+1}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\ln\varepsilon.$$

Из первого из этих выражений, пренебрегая вторым слагаемым по сравнению с первым, получим

$$\varepsilon \approx \frac{\delta}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{h}(h+1)}{2x_1}$$

и следовательно,

$$y_1 \approx -\frac{\delta}{\pi}\sqrt{h+1}\,\cos\frac{\alpha}{2}\ln x_1.$$

Легко видеть:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+1}},$$

$$\sqrt{h+1}\,\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{h} = ctg\frac{\alpha}{2},$$

так что

$$y_1 \approx -\frac{\delta}{\pi}\,ctg\frac{\alpha}{2}\ln x_1;$$

из (I.17) $\delta = \pi\ell tg^2\frac{\alpha}{2}$, и поэтому

$$y_1 \approx -\ell\,tg\frac{\alpha}{2}\cdot\ln x_1. \qquad (I.19)$$

Это выражение мы вывели в предположении $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $x > 0$. Оно остается справедливым и для $x < 0$, поскольку при переходе к отрицательным значениям ε в плоскости u нужно обойти точку вещественной оси $\sqrt{h}$ по верхней полуокружности, в результате чего функция $\ln\varepsilon$ получит постоянное приращение πi , что не внесет изменения в члены высоких порядков.

Полученная формула для y_1 при больших абсолютных значениях x_1 дает парадоксальный результат, что подъем воды перед глиссирующей пластиной бесконечно высок; этот результат не соответствует наблюдаемой картине.

Вычисление сил, действующих на глиссирующую пластину

Для определения давления воспользуемся интегралом Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2}, \qquad (I.20)$$

где p , V давление и относительная скорость в данной точке x_1 поверхности пластины; p_0 , V_0 – атмосферное давление и скорость на свободной поверхности жидкости.

Безразмерный коэффициент давления

$$\overline{\Delta p} = \frac{p-p_0}{\frac{\rho V_0^2}{2}} = 1-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2. \qquad (I.21)$$

Выше было установлено

$$\frac{dW}{dz} = Ve^{-i\theta} = V_0\frac{\sqrt{t}-i}{\sqrt{t}+i}, \qquad (I.6)$$

где t – переменное, изменяющееся в верхней полуплоскости (рис.9). Поверхности пластины соответствует отрицательная часть вещественной оси плоскости t , так что

$$\sqrt{t} = i\eta,$$

где $\eta > 0$ (см. рис. II). Для основной части пластины (CB, рис.6)

$$1<\eta<\infty, \quad \theta = 0$$

и

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\eta-1}{\eta+1}.$$

На участке пластины CA

$$\theta = -\pi; \quad e^{-\pi i} = -1,$$

так что

$$\frac{V}{V_0} = \left|\frac{\eta-1}{\eta+1}\right|. \qquad (I.22)$$

Итак, всюду на пластине $\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^2$

и

$$\overline{\Delta p} = 1-\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^2 = \frac{4\eta}{(\eta+1)^2}. \qquad (I.23)$$

Зависимость $\overline{\Delta p}$ от x устанавливается параметрически через функции $\overline{\Delta p} = f(\eta)$ (I.23) и

$$\bar{x} = \frac{x}{\ell} = f_1(\eta),$$

где функция $f_1(\eta)$ определяется из уравнений (I.II) и (I.I6).

Результаты расчетов $\overline{\Delta p} = f(\bar{x})$ и формы свободной поверхности вблизи пластины для ряда значений α показаны на рис. I2.

Пользуясь распределением давления, можно путем интегрирования по длине пластины вычислить нормальную к пластине составляющую подъемной силы N

$$N = \int_0^\infty \Delta p\, dx. \qquad (I.24)$$

Ее безразмерный коэффициент

$$C_N = \frac{N}{\frac{\rho V_0^2}{2}\ell} = \int_0^\infty \overline{\Delta p}\,\frac{d\bar{x}}{d\eta}\,d\eta. \qquad (I.25)$$

Нормальные силы однако проще подсчитать, пользуясь теоремой о количестве движения.

Рассмотрим глиссирование пластинки по поверхности невесомой жидкости конечной глубины (см. рис. I3). Струя жидкости толщиной $(H+\delta)$ слева натекает на пластинку со скоростью V_0 . Она несет секундное количество движения $\rho(H+\delta)V_0^2$. От этой струи отделяется брызговая струйка, которая поворачивается и отбрасывается по пластинке вперед под углом α к горизонту. Она уносит в этом направлении количество движения $\rho\delta V_0^2$. Основной поток вытекает из-под пластинки и уносит количество движения $\rho H V_0^2$. На жидкость действуют две силы: сила давления N со стороны пластины и сила давления со стороны дна R.

Для того чтобы исключить эту неизвестную силу R, проектируем силы на горизонтальное направление и приравниваем их соответствующей проекции приращения количества движения в единицу времени.

$$-N\sin\alpha = \rho H V_0^2 - \rho(H+\delta)V_0^2 - \rho\delta V_0^2\cos\alpha,$$

отсюда

$$N = \rho\delta V_0^2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \rho\delta V_0^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (I.26)$$

Переходя к пределу при $H\to\infty$ и пользуясь для δ выражением (I.16), получим для бесконечно глубокой жидкости

$$C_N = 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\delta}{l} = \frac{2\pi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\pi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\ln\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}. \qquad (I.27)$$

При малых значениях α

$$C_N \simeq \pi\alpha,$$

т.е. в два раза меньше подъемной силы профиля в неограниченном потоке.

В табл. I и на рис. I4 показана зависимость от α коэффициента

$$K = \frac{N}{\pi\frac{\rho V^2}{2}l\alpha},$$

так что при произвольных α

$$C_N = \pi\alpha K(\alpha). \qquad (I.28)$$

Из рис. I4 и таблицы I видно, что при малых значениях α $K(\alpha)$ - изменяется довольно сильно, так что даже при $\alpha\approx 3^\circ{+}6^\circ$ зависимость $C_N\simeq\pi\alpha$ является недостаточно точной и следует пользоваться формулой (I.28).

Таблица I

α	0,5°	0,75°	I,0°	I,5°	2,0°	3,0°	4,0°	6,0°	8,0°	I0,0°
K	0,983	0,978	0,97	0,957	0,944	0,918	0,895	0,85	0,805	0,765

Н.Калининым [29] были вычислены положения центра давления. Полученная им формула

$$-\frac{x_g}{l} = \frac{1+\frac{\cos\alpha}{2}+2(1-\cos\alpha)\ln 2+\frac{\pi}{2}\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)\ln\frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+1+\cos\alpha+\pi\sin\alpha}. \qquad (I.29)$$

При $\alpha\to 0$ $-\frac{x_g}{l}\to\frac{3}{4}$ как для крыла.

Зависимость $-\frac{x_g}{l}$ от α дана в табл. 2 и изображена на рис. I5. Видно, что для расчета положения центра давления при малых значениях α, так же как и для нормальной силы недостаточно пользоваться предельной формулой, а необходимо пользоваться формулой (I.29) и таблицей 2.

Таблица 2

Зависимость положения центра давления $-x_g/l$ от угла атаки

α	0°	3°	5°	7°	I0°	I2°	I5°	I8°
$-x_g/l$	0,750	0,728	0,7I5	0,703	0,686	0,676	0,664	0,654

α	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	60°	70°	80°
$-x_g/l$	0,649	0,639	0,636	0,639	0,644	0,652	0,67I	0,723	0,824	I,058

2. Линейная теория глиссирования

Если считать углы атаки малыми и при вычислениях отбрасывать малые 2-го и более высоких порядков, то основные результаты теории глиссирования можно получить путем простых вычислений, которые могут быть обобщены на искривленные пластины, пространственную задачу, на учет влияния весомости жидкости и влияния глубины водоема.

Итак, рассмотрим плоскую задачу глиссирования пластинки с малым углом атаки α, когда можно считать, что $\sin\alpha\simeq\operatorname{tg}\alpha\simeq\alpha$ и $\cos\alpha\simeq 1$. Жидкость пока считаем невесомой. Отнесем ее движение к подвижным осям xOy, связанным с пластинкой, движущейся поступательно в горизонтальном направлении со скоростью V_0. См. рис. I6.

Пусть проекции концов пластины A,B на ось Ox будут $-a$ и $+a$, так что середина пластины лежит на Oy. Уравнение контура пластины

$$y = f(x)$$
$$(|x|\leq a).$$

Местный угол α наклона контура к оси Ox определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x).$$

Угол α будем считать малым и непрерывно изменяющимся на контуре. Жидкость далеко впереди пластины будем считать невозмущенной, так что касательная к свободной поверхности на бесконечности -

горизонтальна.

Рассмотрим абсолютное движение жидкости. Поскольку возмущение жидкости вызвано нормальными давлениями от движущейся пластины, оно будет потенциальным. Потенциал скоростей абсолютного движения в подвижной системе xOy от времени не зависит. Обозначим его $\varphi = \varphi(x,y)$. Проекции абсолютных скоростей на оси Ox, Oy

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

так же, как и потенциал $\varphi(x,y)$ будут гармоническими функциями x,y.

Математически задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

при следующих граничных условиях:

1. На поверхности глиссирующей пластины нормальная составляющая скорости жидкости в данной точке должна равняться нормальной составляющей скорости этой точки пластины:

$$v_n = V_0 \cos(n,x),$$

$$\cos(n,x) = -\sin\alpha,$$

т.е.

$$v_n = -V_0 \sin\alpha.$$

2. На участках свободной поверхности давление жидкости должно равняться постоянному атмосферному давлению p_0.

Напишем теперь интеграл Бернулли. Поскольку относительная скорость жидкости имеет составляющие $v_x = -V_0 + u$, $v_y = v$, интеграл Бернулли имеет вид

$$\frac{p}{\rho} + \frac{(-V_0+u)^2 + v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2},$$

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p - p_0}{\rho} = V_0 u - \frac{u^2+v^2}{2}.$$

Замечая, что

$$\cos(n,x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(n,y) = \cos\alpha,$$

на пластине будем иметь

$$v_n = u\cos(n,x) + v\cos(n,y) = -u\sin\alpha + v\cos\alpha,$$

$$V_n = V_0\cos(n,x) = -V_0\sin\alpha.$$

Используем теперь малость угла α и то обстоятельство, что на пластине всюду за исключением малой области около носка u - малая величина, в результате с точностью до малых первого порядка получим

$$v \simeq -V_0\alpha. \qquad (I.30)$$

На свободной поверхности (за исключением малой области у передней кромки пластины) вследствие допущения о пренебрежении малыми величинами второго и более высоких порядков положим $u^2+v^2 \simeq 0$, и условие на свободной поверхности $(\Delta p = 0)$ станет

$$u \simeq 0. \qquad (I.31)$$

Мы уже видели, что обтекание глиссирующей пластины происходит так, что на задней кромке поток стекает с пластины плавно, по касательной. Поскольку там давление равно атмосферному, то $u = 0$. Вблизи передней кромки происходит резкий поворот струи и скорость там может быть значительной (порядка удвоенной скорости пластины).

Пренебрегая влиянием этой малой области на основную часть потока*), мы видим, что малость абсолютных скоростей потока определяется только порядком нормальных скоростей на пластине, которые являются малыми порядка α. Отсюда следует законность отбрасывания квадратов скоростей u^2+v^2 по сравнению с членами u, v.

Близость поверхности пластины и свободных границ жидкости к оси OX позволяет писать граничные условия на отрезках оси OX.

Таким образом, математически задача сводится к определению в нижней полуплоскости xOy гармонической функции $\varphi(x,y)$, удовлетворяющей граничным условиям:

на участках оси x	$\lvert x\rvert \le a$	$v = -V_0\alpha$
на участках	$\lvert x\rvert > a$	$u = 0$
в точке	$x = -a$	$u = 0$

Это - известная задача, которая легко решается методами теории функции комплексного переменного. Обозначим $z = x + iy$ и введем комплексную скорость

$$\frac{dW}{dz} = u(x,y) - iv(x,y). \qquad (I.32)$$

В теории аналитических функций существует теорема о том, что если имеется отрезок вещественной оси, на котором вещественная часть аналитической функции, определенной в нижней полуплоскости, обращается в нуль, то такая функция может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость по правилу:

$$\left.\begin{aligned} u(x,-y) &= -u(x,y) \\ v(x,-y) &= v(x,y) \end{aligned}\right\}. \qquad (I.33)$$

Очевидно, что полученный в результате поток представляет неограниченный поток, обтекающий крыловую дужку, совпадающую с контуром рассматриваемой глиссирующей пластины. Таким образом, течение жидкости при движении глиссирующей пластины такое же, что и в нижней

---

*) Результаты этой теории в дальнейшем показывают, что такое допущение оправдывается.

полуплоскости неограниченного потока, обтекающего тонкое крыло той же конфигурации.

Силы, действующие на глиссирующую пластину

Замечая, что избыточные давления (над атмосферным), действующие на глиссирующую пластину

$$\Delta p \cong \rho V_0 u, \tag{I.34}$$

для нормальной силы, равной с принятым приближением подъемной силе (см. рис. I7), получим

$$N \simeq Y = \int_{-a}^{a} \Delta p \, dx = \rho V_0 \int_{-a}^{a} u \, dx. \tag{I.35}$$

Сопротивление пластины от нормальных давлений

$$W_g = \int_{-a}^{a} \Delta p \, \alpha \, dx = \rho V_0 \int_{-a}^{a} \alpha \, u \, dx. \tag{I.36}$$

Момент относительно середины пластины

$$M = \int_{-a}^{a} x \Delta p \, dx = \rho V_0 \int_{-a}^{a} x \, u \, dx. \tag{I.37}$$

В то же время для крыла в неограниченном потоке (см. рис. I8) соответствующие силы будут:

$$N_{kp} = \int_{-a}^{a} (\Delta p_н - \Delta p_в) \, dx$$

$\Delta p_н$ – избыточное давление на нижнюю сторону крыла,

$\Delta p_в$ – соответствующее давление на его верхнюю сторону. Поскольку

$$u_в = -u_н,$$

$$\Delta p_в = -\Delta p_н,$$

$$\Delta p_в - \Delta p_н = 2 \Delta p_н = 2 \Delta p$$

и

$$N_{kp} = 2 \int_{-a}^{a} \Delta p \, dx = 2 \rho V_0 \int_{-a}^{a} u \, dx.$$

Сопротивление крыла от нормальных давлений $W_{kp} = 0$, так как по теореме Жуковского подъемная сила крыла ортогональна скорости набегающего потока. Это получается в результате уравновешивания тангенциальной составляющей от нормальных давлений $N\alpha$ подсасывающей силой, действующей на носок крыла (см. рис. I8). Итак,

$$N = \frac{1}{2} N_{kp}. \tag{I.38}$$

аналогично

$$M = \frac{1}{2} M_{kp}, \tag{I.39}$$

так что центры давления глиссирующей пластины и крыла одинаковых контуров совпадают.

Рассмотрим теперь плоскую глиссирующую пластинку смоченной длины ℓ.

Из теории крыла в форме плоской пластинки известно, что

$$Y_{kp} = 2\pi \sin\alpha \, \frac{\rho V_0^2}{2} \ell \cong 2\pi\alpha \frac{\rho V_0^2}{2} \ell \tag{I.40}$$

и подсасывающая сила

$$S = 2\pi\alpha^2 \frac{\rho V_0^2}{2} \ell. \tag{I.41}$$

Поэтому для плоской глиссирующей пластинки

$$N \cong \frac{1}{2} Y_{kp} = \pi\alpha \frac{\rho V_0^2}{2} \ell. \tag{I.42}$$

На глиссирующей пластинке подсасывающей силы нет, и на нее действует только сила нормальных давлений N, горизонтальная составляющая которой $N\alpha$ определяет сопротивление нормальных давлений.

Сопоставляя выражение для $N = \pi\alpha \frac{\rho V_0^2}{2} \ell$ с полученным выше по теореме количества движения

$$N = \frac{2}{\alpha} \rho \delta V_0^2, \tag{I.26}$$

определим толщину брызговой струи

$$\delta = \frac{\pi\alpha^2 \ell}{4}. \tag{I.43}$$

Из теории плоского тонкого крыла известно, что на его нижней поверхности тангенциальная составляющая абсолютной скорости жидкости

$$u = V_0 \alpha \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}. \tag{I.44}$$

Поэтому распределение избыточных давлений по плоской глиссирующей пластине будет

$$\Delta p = \rho V_0 u = \rho V_0^2 \alpha \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Его безразмерный коэффициент

$$\overline{\Delta p} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho V_0^2}{2}} = 2\alpha \sqrt{\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}}. \tag{I.45}$$

Пользуясь линейной теорией, можно также рассчитать распределение вертикальных скоростей жидкости по свободной поверхности и определить опускание ее за глиссирующей пластиной. Естественно получается тот же парадоксальный результат, что и в точной теории: опускание свободной поверхности по мере удаления от пластины возрастает как $\ln x$.

Для иллюстрации того, насколько хорошо оправдывается аналогия между глиссирующей пластиной и крылом, на рис. I9, заимствованном из книги Л.И.Седова [30], произведено сравнение расчетов по нелинейным теориям распределения давления по глиссирующей пластине и нижней поверхности крыла – плоской пластины. По горизонтальной оси отложено расстояние по пластине от задней кромки, отнесенное к расстоянию до критической точки. Впереди критической точки, разумеется, потоки сходства не имеют.

Влияние весомости воды

Выше, во введении, указывалось, что задача о глиссировании с учетом влияния весомости воды была решена Л.И.Седовым [I2] *) и Н.Е.Кочиным [I3] **) в линейном приближении.

Постановка задачи аналогична изложенной выше для невесомой жидкости (см. рис. I6). Отличие заключается в формулировке граничных условий на свободной поверхности, которые определяются следующим образом.

Пусть уравнение формы свободной поверхности (в подвижной системе) будет

$$y = \eta(x).$$

Кинематическое граничное условие заключается в том, что нормальная скорость свободной поверхности должна быть равна нормальной составляющей на ней частиц воды. С принятой точностью это может быть записано так:

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V_0 \eta'(x) \qquad \text{при } y = 0 \text{ и } |x| > a.$$

Так как для сопряженных гармонических функций $\varphi(x,y)$ (потенциал скоростей) и $\psi(x,y)$ (функция тока)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

то $\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_0 \eta'(x)$ при $y = 0$ и $|x| > a$

и, отбрасывая несущественную постоянную,

$$\psi(x,0) = +V_0 \eta(x).$$

Динамическое граничное условие заключается в том, что на свободной поверхности

$$p = p_0 = Const.$$

Из интеграла Бернулли для весомой жидкости следует:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{(-V_0 + u)^2 + v^2}{2} + gy = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2},$$

или с принятой степенью точности для свободной поверхности

$$-V_0 u(x,0) + g\eta(x) = 0 \qquad \text{для } |x| > a \tag{I.46}$$

или

$$\frac{\partial \psi(x,0)}{\partial x} - \frac{\nu}{a} \psi(x,0) = 0 \qquad |x| > a, \tag{I.47}$$

где $\nu = \frac{ga}{V_0^2} = \frac{1}{F_{ra}^2}$, F_{ra} - число Фруда (по длине $a = \frac{\ell}{2}$).

---

*) Это решение также изложено в книге Л.И.Седова [30].

**) Это решение можно также найти в "Собрании сочинений акад. Н.Е.Кочина" изд. АН СССР, т. II, 1946.

На заднем конце глиссирующей пластины A (см. рис. I6) потребуем конечной скорости; напротив, вблизи переднего края B скорость может не оставаться ограниченной. На бесконечности перед глиссирующей пластиной полагаем, что $u = 0$, $v = 0$.

Итак, задача сводится к определению в нижней полуплоскости переменного z, комплексного потенциала $W(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ - аналитической функции z, удовлетворяющей на оси OX граничным условиям

на пластине $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V_0 f'(x)$

и на свободной поверхности (I.47).

Решения были получены в виде первых членов разложений по малому параметру ν. Исследования Л.И.Седова и Н.Е.Кочина являются довольно сложными и выходят за рамки данной работы. Поэтому ограничимся приведением окончательных результатов, применительно к плоской пластинке. Подъемная сила и момент пластины будут:

$$\bar{Y} = \frac{Y}{\frac{\rho V_0^2}{2}\ell} = \pi\alpha\left[1 - \frac{4+\pi^2}{\pi}\nu\right] + O(\nu^2 \ln \nu), \tag{I.48}$$

$$\bar{M} = \frac{M}{\frac{\rho V_0^2}{2}\ell^2} = \frac{\pi}{4}\alpha\left[1 - \frac{8+3\pi^2}{3\pi}\nu\right] + O(\nu^2 \ln \nu) \tag{I.49}$$

Момент M берется относительно середины пластины.

Возвышение задней кромки пластины над невозмущенным уровнем

$$\bar{H} = \frac{H}{\ell\alpha} = -\frac{1}{2}\left[1 + \ln\frac{\nu\gamma}{2}\right] + O(\nu \ln \nu), \tag{I.50}$$

где $\gamma = 1{,}781$, а $O(\nu \ln \nu)$ - малая величина порядка $\nu \ln \nu$.

Графики функций $\bar{Y}$, $\bar{M}$, $\frac{x_d}{\ell}$, $\bar{H}$ от числа Фруда, построенные с точностью до приведенных выше членов, изображены на рис. 20, 21, 22, 23 (пунктирные линии).

Важнейший результат исследований Л.И.Седова и Н.Е.Кочина, заключается в том, что при учете влияния весомости действительно имеет место конечное возвышение пластины над невозмущенным уровнем воды.

Метод Л.И.Седова [I2] позволяет построить решение не только в виде асимптотического ряда для малых значений ν. Он дает возможность рассчитать его для любых чисел Фруда, начиная с нуля. Эта работа была выполнена Ю.С.Чаплыгиным [I4]. Результаты его расчетов показаны на рис. 20-23 (сплошные линии), где они сравниваются с первыми членами асимптотических разложений Л.И.Седова и Н.Е.Кочина (пунктирные линии).

Начало кривых при $\frac{V_0}{\sqrt{g\ell}} < 1$ соответствуют режиму плавания (в предположении отрыва воды от задней кромки и незатекания ее на верхнюю поверхность).

Работы Л.И.Седова, Н.Е.Кочина и С.А.Чаплыгина показывают существенную необходимость учета влияния весомости для определения возвышения уровня глиссирующей пластины над невозмущенным уровнем воды.

Другим важным результатом является то, что при $\frac{V_0}{\sqrt{gl}} > 1{,}9$ задняя кромка пластины оказывается выше невозмущенного уровня жидкости. Этот результат ранее (1941 г.) был экспериментально установлен Л.А.Эпштейном [6],[7] для плоских пластинок конечной ширины.

Полное сопротивление глиссирующей пластины состоит из сопротивления трения $W_{тр}$ и сопротивления нормальных давлений W_n:

$$W = W_{тр} + W_n . \tag{I.51}$$

Последнее представляет проекцию на горизонталь нормальной силы

$$W_n = N \sin\alpha . \tag{I.52}$$

Эта составляющая сопротивления в свою очередь подразделяется на волновое сопротивление $W_{волн.}$, связанное с отдачей энергии на образование волн за пластиной, и брызговое сопротивление, $W_{бр}$, идущее на образование брызговой струйки, отбрасываемой вперед.

Как известно [31] волновое сопротивление равно половине полной энергии волн E, приходящейся на единицу длины.

$$E = \frac{\rho g A^2}{2}$$

$$W_{волн.} = \frac{\rho g A^2}{4} . \tag{I.53}$$

Здесь A - амплитуда (половина высоты) волн, образующихся за пластиной. Таким образом, знание волнового сопротивления позволяет рассчитать волну, поднятую пластиной.

$$y_{волн.} = A \sin\left(\nu \frac{x}{l/2} + \theta\right),$$

где

$$\frac{\nu}{l/2} = \frac{2\pi}{\lambda} .$$

Длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\nu} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi l}{g\frac{l}{2}} V_0^2 = \frac{2\pi}{g} V_0^2 . \tag{I.54}$$

Зависимость соотношения между $W_{волн.}$ и $W_{бр.}$ от числа Фруда показана на рис. 24.

<u>Влияние глубины водоема</u>

Во введении указывалось, что нелинейная задача была решена еще М.И.Гуревичем и А.Р.Янпольским [10]. Решение этой задачи также опубликовано в книге Л.И.Седова [30].

Вследствие достаточной сложности приводить его не будем. Существует также соответствующая линейная теория, справедливая для малых углов атаки. На рис. 25 приведена зависимость отношения подъемной силы глиссирующей пластины в бассейне глубины h к соответствующей силе в неограниченно глубокой воде от длины пластины, отнесенной к глубине водоема. Эта зависимость была вычислена С.А.Чаплыгиным [19]. Из рис. 25 видно, что при малых глубинах ($\frac{h}{l} \leq 1$) это влияние значительно.

Глава 2. ГЛИССИРОВАНИЕ ТЕЛ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

1. Метод аналогии с крылом

Рассмотрим задачу о глиссировании плоской пластинки конечной ширины по поверхности идеальной, тяжелой, несжимаемой жидкости, занимающей все нижнее полупространство. Пусть пластинка скользит вдоль свободной поверхности поступательно с постоянной скоростью V_0. Движение жидкости будем определять, пользуясь подвижной системой координат x', y', z', связанной с пластинкой; ось Ox' находится в плоскости невозмущенного уровня и направлена в сторону движения, ось Oy' направлена вертикально вверх, ось Oz' перпендикулярна осям Ox' и Oy' и составляет с ними правую систему осей (рис. 26). Начало координат находится на середине линии пересечения плоскости пластины с невозмущенной свободной поверхностью.

Примем, что движение жидкости потенциальное и установившееся относительно пластинки. Из интеграла Лагранжа для давления внутри жидкости имеем формулу

$$p'-p_0=\rho V_0\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}-\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2\right]-\rho g y', \qquad (2.1)$$

где p_0 – атмосферное давление, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, $\varphi'(x',y',z')$ – потенциал скоростей абсолютного движения жидкости. В дальнейшем будет удобно пользоваться безразмерными величинами; для этого положим

$$x'=x,\ y'=ay,\ z'=az,\ \varphi'=aV_0\varphi,\ p'-p_0=\rho V_0^2 p, \qquad (2.2)$$

где $2a$ – проекция смоченной длины пластины в плоскости симметрии на ось Ox.

Соотношение (2.1) в безразмерных величинах примет вид

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)-\nu y, \qquad (2.3)$$

где

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\ \nu=\frac{ga}{V_0^2}=\frac{1}{Fr_a^2}; \qquad (2.4)$$

ν – безразмерная величина, связанная формулой (2.4) с числом Фруда $Fr_a=\frac{V_0}{\sqrt{ga}}$. Большим значениям числа Fr соответствуют малые значения $\nu>0$. Безразмерное соотношение (2.3) удобно для сравнения порядков различных членов.

Для определения гармонической функции $\varphi(x,y,z)$ имеем следующие граничные условия.

На смоченной поверхности выполняется условие обтекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\sin\alpha, \qquad (2.5)$$

где n – внешняя к жидкости нормаль, α – угол атаки глиссирующей пластинки.

На свободной поверхности $p'=p_0$ и поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}-\nu y=0. \qquad (2.6)$$

Считая, что α и y на смоченной поверхности пластинки и на свободной поверхности малы, мы можем линеаризовать задачу, следуя методам теории крыла. Граничные условия (2.5) и (2.6) перенесем на плоскость xOy, причем в условии (2.6) пренебрежем членом $\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}$. При такой приближенной постановке задачи, когда ν считается малой величиной порядка α (большие значения числа Фруда, большая скорость движения), нет нужды в условии (2.6) сохранять член νy, так как он имеет тот же порядок α^2, что и отбрасываемый член $\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}$. Таким образом, при малых α, y и ν вместо условия (2.6) имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad y=0. \qquad (2.7)$$

Учитывая соотношение (2.7), для потенциала φ, удовлетворяющего уравнению Лапласа, получаем граничные условия:

1. $\varphi=0$ вне следа и крыла (вне S и Σ)
2. $\varphi=f(z)$ в следе, (на Σ)
3. $\varphi=F(x,0,z)$ на крыле (на S).

Поскольку есть часть плоскости xOy, где $\varphi=0$, функция φ может быть аналитически продолжена в верхнее полупространство по правилу:

$$\varphi(x,-y,z)=-\varphi(x,y,z).$$

Скорости при этом продолжатся следующим образом (см. рис. 26):

$$v_x(x,-y,z)=-v_x(x,y,z)$$
$$v_y(x,-y,z)=v_y(x,y,z)$$
$$v_z(x,-y,z)=-v_z(x,y,z).$$

В результате продолжения получается потенциальный поток в бесконечном пространстве. Поток этот представляет собой движение жидкости около тонкого крыла, имеющего форму глиссирующей поверхности и движущейся с той же скоростью, что и глиссирующая поверхность.

В линеаризованной постановке задачи давление с точностью до малых величин высших порядков равно $p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Так как за исключением небольшой области у передней кромки производная над крылом и под крылом отличается только знаком, то ясно, что подъемная сила глиссирующей пластинки равна половине подъемной силы соответствующего крыла, а сопротивление пластинки равно половине сопротивления крыла, вызванного нормальными давлениями.

По теореме Жуковского связанное с нормальными давлениями сопротивление тонкого крыла погашается подсасывающей силой, отсутствующей у глиссирующей пластинки; поэтому сопротивление глиссирующей пластинки, называемое брызговым, противоположно направлению подсасывающей силы и по величине равно ее половине.

В силу сказанного выше для нахождения сил, действующих на глиссирующую пластинку, могут быть использованы результаты теории крыла конечного размаха. Однако при замене глиссирующей пластинки крылом оказывается неизвестной его форма, поскольку неизвестна смоченная длина пластинки.

Смоченную длину можно определить на основе высказанной Г.Вагнером [9] идеи, то есть с помощью вычисления подъема жидкости впереди пластинки до встречи с ее плоскостью.

Рассмотрим схему предложенного М.Г.Щегловой в работе [22] способа определения смоченной длины. Поскольку течение жидкости, создаваемое глиссирующей пластинкой, при больших скоростях движения эквивалентно течению в нижнем полупространстве около тонкого крыла, заменим пластинку системой вихрей, как и крыло, движущееся в безграничной жидкости.

Обозначим через $v_y(x, z, t)$ вертикальную скорость частицы жидкости на поверхности воды, вызванную глиссирующей пластинкой на данном расстоянии от нее и вычисленную по формулам Био-Савара для присоединенного вихря и вихревой пелены, заменяющих крыло. Наличие вихревой системы крыла приводит к подъему жидкости перед пластинкой, который в произвольной точке свободной поверхности в том случае, если движение пластинки происходило бесконечно долго, равен $\eta = \int_{-\infty}^{t} v_y\, dt$.

Величина v_y зависит от циркуляции присоединенного и свободных вихрей, которая зависит от смоченной длины пластинки.

С другой стороны, высота подъема жидкости до встречи с пластинкой может быть также выражена через смоченную длину пластинки

$$\eta = (l - l_c)\,\alpha ,$$

где l_0 - длина пластинки под невозмущенным уровнем воды; l - смоченная длина в данном сечении (определяемая в результате решения задачи).

Приравнивая значения η, вычисленные двумя различными способами, получим уравнение для определения l. Расчет был проведен для двух вихревых схем, заменяющих крыло, - схемы с П-образным вихрем при постоянном значении циркуляции вдоль размаха и схемы с вихревой пеленой при эллиптическом распределении циркуляции.

Подсчитаем подъем свободной поверхности в середине крыла, заменяя крыло П-образным вихрем с присоединенным вихрем, расположенным на расстоянии 1/4 хорды от передней кромки (см. рис. 27), и пренебрегая отклонением свободных вихрей от направления скорости движения. Замена крыла П-образным вихрем дает близкие к практике результаты для крыльев большого удлинения.

Элементарная скорость, вызываемая элементом вихревой нити $d\bar{S}$, согласно закону Био-Савара, равна

$$d\bar{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\,\frac{[d\bar{S}\,\bar{r}]}{r^3},$$

где Γ - интенсивность вихря, $\bar{r}$ - радиус-вектор, проведенный от середины элемента вихревой нити $d\bar{S}$ в точку пространства, в которой определяется индуцируемая скорость.

Определим возмущенную скорость частиц свободной поверхности, индуцируемую присоединенным и свободными вихрями. Поскольку угол атаки пластинки мал, можно пренебречь возвышением вихря над свободной поверхностью и считать координату $y_в$ вихря, равной нулю. В этом случае возмущенную скорость от присоединенного вихря (рис. 28), можно считать направленной вдоль оси Oy. Обозначая через ζ координату середины элемента $d\zeta$ присоединенного вихря и через θ угол между осью Ox и радиусом вектором $\bar{r}$, можем установить следующие соотношения для r, ξ, θ:

$$\zeta = (x-\xi)\,tg\,\theta;\quad d\zeta = \frac{(x-\xi)}{\cos^2\theta}\,d\theta;\quad r = \frac{x-\xi}{\cos\theta}.$$

Учитывая эти соотношения, определим скорость $v_{y\,пр}$, индуцируемую присоединенным вихрем,

$$v_{y\,пр} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{r^2}\,d\zeta = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\cos\theta}{r^2}\,d\zeta =$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta}{(x-\xi)}\,d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi(x-\xi)}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1).$$

Принимая во внимание, что

$$\sin\theta = \frac{tg\,\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \frac{\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+\zeta^2}},$$

получим

$$v_{y\,пр} = \frac{\Gamma}{4\pi(x-\xi)}\,\frac{b}{\sqrt{(x-\xi)^2+(\frac{b}{2})^2}},$$

где b - размах пластины.

Проводя аналогичные выкладки для возмущенной скорости на свободной поверхности в плоскости симметрии от воздействия свободных вихрей $v_{y_{св}}$, будем иметь ($v_{y_{св}}$ направлена вертикально вниз)

$$v_{y_{св}} = -\frac{\Gamma}{\pi b}\left(1-\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}\right).$$

Для того чтобы определить подъем свободной поверхности за счет наличия скорости ее частиц при приближении крыла, необходимо выражение для возмущенной скорости проинтегрировать по времени от минус бесконечности до момента t, соответствующего встрече частицы с поверхностью крыла

$$\eta = \int_{-\infty}^{t} v_y\,dt = -\frac{1}{V_0}\int_{\infty}^{(\ell-\ell_0)} v_y\,dx = \frac{1}{V_0}\int_{\ell-\ell_0}^{\infty}(v_{y_{пр}}+v_{y_{св}})\,dx = \frac{\Gamma}{4\pi V_0}f(\lambda),$$

где V_0 - скорость, с которой жидкость притекает из бесконечности, равная $-\frac{dx}{dt}$ (отсюда $dt = -\frac{dx}{V_0}$);

$f(\lambda)=2\ln\left(\sqrt{4\lambda^2+1}+2\lambda\right)+\frac{1}{\lambda}\left(1-\sqrt{4\lambda^2+1}\right)$ - функция, получающаяся в результате интегрирования ($\lambda=\frac{b}{\ell}$).

Приравнивая этот подъем величине $(\ell-\ell_0)\alpha$, получим трансцендентное уравнение для определения смоченной длины ℓ в плоскости симметрии крыла

$$\frac{\Gamma}{4\pi V_0}f(\lambda)=(\ell-\ell_0)\alpha . \qquad (2.8)$$

Определим величину циркуляции в зависимости от угла атаки α. Для плоских пластинок приблизительно прямоугольного очертания в плане можно пренебречь изменением в поперечном направлении угла скоса потока, принимая, что угол постоянен и соответствует эллиптическому распределению подъемной силы $\alpha_i = \frac{C_y}{\pi\lambda}$. Величина ℓ переменна по размаху крыла, однако в первом приближении она может быть принята постоянной и равной смоченной длине в плоскости симметрии.

Тогда для коэффициента в соответствии с теорией Прандтля крыла конечного размаха подъемной силы крыла можем записать:

$C_y = 2\pi(\alpha-\alpha_i) = 2\pi\left(\alpha-\frac{C_y}{\pi\lambda}\right)$ и из этого уравнения определяем

$$C_y = \frac{2\pi\alpha}{1+\frac{2}{\lambda}}.$$

Выражая подъемную силу крыла по теореме Жуковского через циркуляцию и через коэффициент подъемной силы, получим уравнение

$$Y=\rho V_0\Gamma b = C_y\frac{\rho V_0^2}{2}b\ell ,$$ откуда

$$\Gamma = \frac{C_y V_0\ell}{2} = \frac{\pi\alpha}{1+\frac{2}{\lambda}}V_0\ell .$$

Подставляя полученное выражение для Γ в уравнение (2.8), будем иметь

$$\frac{\alpha\ell}{4\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)}f(\lambda)=\ell\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)\alpha ,$$

откуда

$$f(\lambda)=4(1-\bar{\ell}_0\lambda)\left(1+\frac{2}{\lambda}\right), \qquad (2.9)$$

где $\bar{\ell}_0 = \frac{\ell_0}{b}$.

Наиболее наглядным является графическое решение уравнения (2.9). На рис. 29 дан график функции $f(\lambda)$ и приведено параметрическое семейство кривых, задаваемых аналитически правой частью того же уравнения

$$y(\lambda,\bar{\ell}_0)=4(1-\bar{\ell}_0\lambda)\left(1+\frac{2}{\lambda}\right).$$

Параметром семейства является относительная величина погружения задней кромки $\bar{\ell}_0$. Абсцисса точки пересечения кривых представляет собой то значение удлинения λ, а следовательно, и смоченной длины, которое удовлетворяет уравнению (2.9). Следует отметить, что удлинение λ и смоченная длина $\bar{\ell}$ для малых углов наклона пластинки определяется только величиной $\bar{\ell}_0$ и не зависит от угла атаки пластинки.

Можно видеть, что уравнение имеет решение не только при погружении задней кромки ниже уровня воды, но и при $\bar{\ell}_0 = 0$ и отрицательных значениях $\bar{\ell}_0$, больших предельного значения $\bar{\ell}_0 = -0.0275$. Когда $\bar{\ell}_0 = -0.0275$, кривая $y(\lambda,\bar{\ell}_0)$ касается $f(\lambda)$ в точке $\lambda \simeq 22.5$. При отрицательном значении $\bar{\ell}_0$ задняя кромка глиссирующей пластинки приподнята над невозмущенным уровнем воды (рис. 30), при $\bar{\ell}_0 = 0$ она касается невозмущенного уровня воды; в этом случае удлинение пластинки $\lambda \approx 7.9$. При отрицательных значениях $\bar{\ell}_0$ (но больших величины - 0.0275) кривая $y(\lambda,\bar{\ell}_0)$ пересекается с кривой $f(\lambda)$ в двух точках, лежащих по обе стороны от значения $\lambda \approx 22.5$. Решение уравнения (2.9), соответствующее $\lambda > 22.5$, по-видимому, не имеет физического смысла.

На рис. 31 представлен характер изменения подъемной силы пластинки при изменении осадки; осадка h связана с ℓ_0 зависимостью $h=\ell_0\alpha$.

При медленном опускании пластинки в воду изменению ее подъемной силы будет соответствовать ветвь $O_1O_3O_4$, ветвь O_4O_3 соответствует медленному выходу пластинки из воды до тех пор, пока задняя кромка достигнет невозмущенного уровня воды (точка O_3), ветвь O_3O_2 - наличию отрицательных осадок при положительном значении подъемной силы, точка O_2 - отрыву жидкости от пластинки.

Ветвь $O_2 O_1$ соответствует режиму неустойчивого глиссирования - уменьшению подъемной силы с ростом погружения - и экспериментом воспроизведена быть не может.

Возможность глиссирования при отрицательных осадках, приводящая к явлению гистерезиса подъемной силы, была впервые обнаружена Л.А.Эпштейном в опытах с плоскими пластинками [6]. Результаты эксперимента в виде зависимости $\frac{\ell}{b}$ от $\frac{\ell_c}{b}$ показаны на рис. 32. На этой же фигуре приведены результаты расчета подъема свободной поверхности по методу, изложенному выше.

М.Г.Щегловой было сделано также уточнение рассмотренной выше задачи с помощью замены пластинки присоединенным вихрем с эллиптическим распределением циркуляции вдоль размаха с ви ревой пеленой. Эта схема приводит к уравнению, аналогичному (2.9), в котором функция $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda)=2\sqrt{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2+1}\left[K\left(\frac{\pi}{2},æ\right)-2E\left(\frac{\pi}{2},æ\right)\right]+\frac{\pi}{2\lambda},$$

где

$$K\left(\frac{\pi}{2},æ\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-æ^2\sin^2\varphi}};\quad E\left(\frac{\pi}{2},æ\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-æ^2\sin^2\varphi}\,d\varphi -$$

- полные эллиптические интегралы I и II рода, $æ$ - модуль эллиптического интеграла, равный $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2}}$. В правой части уравнения оказывается функция $y(\lambda,\bar{\ell}_c)=\pi(1-\bar{\ell}_c\lambda)\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)$.

Схема с эллиптическим распределением циркуляции вдоль размаха дает несколько большую величину смоченной длины пластинки ℓ при фиксированной осадке.

А.А.Королевым в 1973 г. под руководством А.Б.Лотова была рассмотрена задача о глиссировании пластинки произвольного поперечного сечения с помощью замены д ища системой дискретных вихрей.

Пластинка предполагалась достаточно плоской, а углы атаки достаточно малыми, так что граничные условия сносились на невозмущенную поверхность жидкости. Полуразмах смоченной поверхности пластинки делился на N равных частей. По длине поверхность делилась на M полос равной площади, как показано на рис. 33.

В результате смоченная площадь полуразмаха пластинки оказывалась разделенной на $N \times M$ панелей. На каждой панели в четверти ее хорды от передней кромки располагался присоединенный вихрь с размахом, равным ширине панели. От концов присоединенного вихря вниз по потоку отходят свободные вихри. На 3/4 хорды панели (от передней кромки), проходящей через середину присоединенного вихря, располагалась расчетная точка.

Интенсивности вихрей определялись, как в работе С.М.Белоцер-

ковского [32], исходя из условия непротекания жидкости в расчетных точках. Форма свободной поверхности определялась методом последовательных приближений.

Расчет, который проводился с помощью ЭВМ, показал, что в большинстве случаев на полуразмахе пластинки с приемлемой для практики точностью достаточно разместить 5x7=35 вихрей.

Как можно видеть на рисунке 32, расчет с помощью системы дискретных вихрей дает результаты, более близкие к результатам эксперимента Л.А.Эпштейна, чем расчет с помощью только одного вихря. Результаты Л.А.Эпштейна приведены для числа Фруда (по размаху пластинки b) $F_r=\frac{V_0}{\sqrt{gb}}=\frac{V_0}{\sqrt{g\ell}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=4.77$, когда весомостью воды согласно теоретическим решениям, рассмотренным в разделе 2 главы I, можно пренебречь. Светлыми точками на рис. 32 показаны осредненные экспериментальные результаты Зотторфа (см. работу [5]), полученные при числах Фруда $F_r=\frac{V_0}{\sqrt{g\ell}}=3.5\div5.6$ 3.5÷5.6. Зотторфом не были получены режимы с отрицательной осадкой, по-видимому, из-за погрешностей измерений при малых $\bar{\ell}_c$.

Некоторое расхождение в результатах может быть объяснено также разным подходом к определению понятия смоченной длины у различных авторов.

Для плоскокилеватых пластин расчет А.А.Королева показал, что при больших значениях отношения угла килеватости к углу дифферента ($\beta/\alpha \geqslant$ 2.0÷2.5) и малых удлинениях ($\lambda \leqslant 1$) подпора жидкости по килю пластины практически не происходит, и угол стреловидности передней кромки смоченной поверхности численно совпадает со значением, полученным из решения плоской задачи о погружении бесконечного клина.

2. Метод плоских сечений

Рассмотрим поступательное глиссирование плоскокилеватой пластины с постоянной скоростью (рис. 34). Ось Ox направим вдоль киля, начало координат поместим в кормовой точке киля, ось Oy направим в плоскости симметрии пластины вверх перпендикулярно оси Ox.

Для нахождения подъемной силы и момента в соответствии с работами А.Н.Тихонова [25] и Г.В.Логвиновича [33] применим метод плоских сечений. В плоскости, нормальной к килю пластины и неподвижной в пространстве, мы наблюдаем как бы погружение в воду клина бесконечной длины. Если пренебречь перетеканием жидкости вдоль пластины, то скорость погружения клина будет постоянной и равной

$V_0\alpha$, где V_0 – скорость глиссирования, α – угол дифферента пластины (предполагаем $\alpha \ll 1$, так что $\cos\alpha \simeq 1, \sin\alpha \simeq \alpha$).

Автомодельную теорию погружающегося клина бесконечной длины, что соответствует случаю, когда кромка клина не смочена, развил Г.Вагнер [9]. Для силы, действующей на единицу длины клина, погружающегося в невесомую жидкость с постоянной скоростью V_n, Вагнер предложил следующее выражение

$$f = \rho\pi\left(\frac{\pi}{2\beta}-1\right)^2 h V_n^2, \qquad (2.10)$$

где β – угол поперечной килеватости клина, h – погружение клина от уровня невозмущенной свободной поверхности. Сила, действующая на элементарную призму, вырезанную двумя бесконечно близкими сечениями, перпендикулярными к килю, будет равна (рис. 34)

$$dY_\partial = f\,dx = 2\rho k(\beta) h V_0^2 \alpha^2 dx, \qquad (2.11)$$

здесь $k(\beta) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2\beta}-1\right)^2$, h – погружение клина в сечении с координатой x.

Интегрируя эти элементарные силы, получим полную гидродинамическую силу, нормальную к килю

$$Y_\partial = \int_0^\ell dY_\partial = 2\rho k(\beta) V_0^2 \alpha^2 \int_0^\ell h\,dx.$$

Пренебрегая подпором на киле и учитывая малость угла α будем иметь $h = (\ell - x)\alpha$; $dx = -\frac{dh}{\alpha}$;

$$Y_\partial = 2\rho k(\beta) V_0^2 \alpha \int_0^H h\,dh, \qquad (2.12)$$

где H – погружение задней кромки киля.

После интегрирования находим выражение гидродинамической подъемной силы

$$Y_\partial = \rho k(\beta) V_0^2 \alpha H^2. \qquad (2.13)$$

Гидродинамический момент от нормальных давлений относительно задней кромки получается интегрированием моментов элементарных сил (2.11)

$$M_\partial = \int x\, dY_\partial = 2\rho k(\beta) V_0^2 \alpha^2 \int_0^\ell x h\,dx$$

или, заменяя x на h в соответствии с соотношениями (2.12),

$$M_\partial = 2\rho k(\beta) V_0^2 \alpha \int_0^H \left(\ell - \frac{h}{\alpha}\right) h\,dh.$$

Отсюда находим выражение для гидродинамического момента

$$M_\partial = \frac{1}{3}\rho k(\beta) V_0^2 H^3. \qquad (2.14)$$

Подъемная сила пропорциональна углу дифферента и квадрату осадки, а момент – кубу осадки и не зависит от угла дифферента.

Плечо приложения подъемной силы (координата центра давления) равно

$$x_{\text{цд}} = \frac{M_\partial}{Y_\partial} = \frac{1}{3}\frac{H}{\alpha} = \frac{\ell}{3},$$

т.е. гидродинамическая подъемная сила приложена на одной трети смоченной длины по килю от задней его точки.

При глиссировании действующие силы в основном обусловлены динамическим давлением воды. Силы весомости невелики по сравнению с динамическими; в первом приближении влияние весомости будем учитывать, как в работе [5], добавлением к динамическим подъемной силе и моменту гидростатических сил и момента.

Гидростатические силу и момент будем вычислять, как предложено Л.И.Седовым в работах [5] и [34], с учетом того, что подъем жидкости по бокам пластины (подпор) их уменьшает.

Как показано в работе Фердинанда [35], подпор по бокам погружающегося клина в широком диапазоне углов килеватости ($0 \le \beta \le 50°$) можно принять равным вагнеровскому, т.е. $\frac{c}{c_0} = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 35), где c и c_0 – проекции на горизонтальную плоскость расстояний от киля до основания брызговой струи и до пересечения щеки клина с невозмущенной поверхностью воды.

Элементарная гидростатическая сила, действующая в сечении x длиной dx, выражается:

$$P_c\,dx = 2\,dx \int_0^{c/\cos\beta} \Delta p_c \cos\beta\, d\xi.$$

Используя соотношения

$$\Delta p_c = \rho g(h - y);\quad y = z\,tg\beta;\quad dz = \cos\beta\, d\xi$$

$$P_c\,dx = 2\,dx\,\rho g \int_0^c (h - z\,tg\beta)\, dz = 2\,dx\,\rho g c h\left(1 - \frac{c}{2h}\, tg\beta\right),$$

где Δp_c – гидростатическое давление, g – ускорение свободного падения.

Выражая c через c_0 с помощью соотношения $c = c_0\frac{\pi}{2}$ и используя зависимость $h = c_0\, tg\beta$, будем иметь

$$P_c\,dx = \pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\rho g c_0^2\, tg\beta\, dx \simeq \frac{2}{3}\rho g c_0^2\, tg\beta\, dx,$$

здесь учтено, что

$$\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \simeq 0.67 \simeq \frac{2}{3}.$$

Интегрируя элементарные силы вдоль смоченной длины пластины и учитывая зависимость, вытекающую из геометрических соображений $c_0 = \frac{H}{\ell\, tg\beta}(\ell - x)$, получим гидростатическую силу, действующую на всю пластину.

$$Y_c = \frac{2}{3}\rho g \frac{H^2}{\ell^2\, tg\beta}\int_0^\ell (\ell-x)^2\, dx = \frac{2}{9}\rho g\frac{H^3}{\alpha\, tg\beta}. \qquad (2.15)$$

Полная сила, действующая на пластинку, равна сумме гидростатической силы Y_c и гидродинамической силы Y_d, вычисленной выше.

Интегрируя моменты элементарных сил, для гидростатического момента относительно начала координат получим

$$M_c = \int_0^l x P_c \, dx = \frac{1}{18} \rho g \frac{H^4}{\alpha^2 tg\beta}. \qquad (2.16)$$

Центр давления гидростатической силы лежит на расстоянии $\frac{l}{4}$.

Метод плоских сечений для расчета гидродинамических силы и момента оправдывается тем больше, чем более вытянута в длину смоченная поверхность глиссирующей пластины. Однако, как можно видеть на рис. 36, где приведено распределение погонной динамической нагрузки по смоченной длине пластины в виде зависимости величины $\frac{dC_y}{d\bar{x}} = \frac{2}{\rho V^2 l H} \frac{\partial Y_d}{\partial x}$ от безразмерной координаты $\bar{x} = \frac{x}{l}$, по этому методу на задней кромке получается наибольшая нагрузка, в то время как в действительности она в районе транца уменьшается и становится нулевой в самом транцевом сечении.

Экспериментальные данные, показанные на этой фигуре, получены Д.Д.Коврижных в работе [27] с помощью плоскокилеватой пластины с отдельными динамометрированными секциями.

Для средних удлинений смоченной поверхности пластины ($\lambda \sim 2$), имеющих место на практике, отмеченное уменьшение погонной нагрузки является существенным.

Для учета этого явления в работах [26] и [27] предложено уточнен.. метода плоских сечений введением специальной поправки, по существу синтезирующее метод аналогии с крылом и метод плоских сечений. Это уточнение исходит из предположения, что отношение реальной элементарной подъемной силы в данном сечении к подъемной силе этого сечения, определяемой по гипотезе плоских сечений, одно и то же для глиссирующей пластины и для плоского треугольного крыла той же формы в плане, что и смоченная поверхность глиссирующей пла..ины. Имеется также в виду, что теоретически определенная с учетом конечного удлинения элементарная подъемная сила сечения крыла близка к реальной.

Таким образом, предполагается, что динамическая составляющая элементарной подъемной силы глиссирующей плоскокилеватой пластины dY, действующая на элементарное сечение длины dx (рис. 34), определяется следующим образом:

$$dY = \mu \, dY^{пл.сеч.}, \qquad (2.17)$$

где $dY^{пл.сеч.}$ - элементарная подъемная сила глиссирующей пластины, определяемая по методу плоских сечений; $\mu = \frac{dY_{кр.}}{dY^{пл.сеч.}_{кр.}}$ - вводи-

мая поправка (переменная вдоль смоченной поверхности пластины); $dY_{кр.}$ - сила, действующая на сечение соответствующего крыла длины dx, определяемая теоретически с учетом конечности удлинения крыла или экспериментально; $dY^{пл.сеч.}_{кр.}$ - определяемая методом плоских сечений подъемная сила, действующая на элементарное сечение длины dx соответствующего крыла. Нетрудно видеть, что это предположение в предельных случаях $\beta \to 0$ при фиксированном удлинении и $\lambda \to 0$ при фиксированном β обеспечивает результаты, получающиеся по методам аналогии с крылом и плоских поперечных сечений соответственно.

Соотношение (2.17) можно упростить, если принять во внимание, что отношение $\frac{dY^{пл.сеч.}}{dY^{пл.сеч.}_{кр.}}$ не зависит от продольной координаты, а зависит только от угла килеватости. Действительно, пользуясь понятием присоединенной массы $m_{кр.}$ для крыла, можем записать

$$dY^{пл.сеч.}_{кр.} = -\frac{d}{dt}(m_{кр.} V_n) \, dx.$$

Учитывая, что $dt = \frac{dx}{V_0}$; $V_n = V_0 \alpha$; $m_{кр.} = \rho \pi c^2$, получим

$$dY^{пл.сеч.}_{кр.} = -2\rho \pi \alpha V_0^2 c \frac{dc}{dx}.$$

Принимая во внимание зависимость $c = c_{тр.} \frac{l - x}{l}$, где $c_{тр.}$ - полуширина основного потока на транце пластины (половина задней кромки эквивалентного крыла) и $\frac{c_{тр.}}{l} = \frac{\pi \alpha}{2 tg\beta}$, будем иметь

$$dY^{пл.сеч.}_{кр.} = 2\rho \pi \alpha V_0^2 (l - x) \left(\frac{c_{тр.}}{l}\right)^2 = \frac{1}{2} \rho \pi^3 \alpha^3 V_0^2 (l - x) \frac{1}{tg^2\beta}.$$

Выражение для величины $dY^{пл.сеч.}$ согласно формуле имеет вид

$$dY^{пл.сеч.} = 2\rho k(\beta) \alpha^3 V_0^2 (l - x) \, dx, \text{ т.к. } h = (l - x)\alpha.$$

Разделив полученные выражения для элементарных сил глиссирующей пластины и крыла, определенных методом плоских сечений, получим

$$\frac{dY^{пл.сеч.}}{dY^{пл.сеч.}_{кр.}} = \frac{4}{\pi^3} k(\beta) tg^2\beta.$$

Таким образом, рассматриваемое отношение одинаково во всех поперечных сечениях и может рассматриваться как поправка на угол β к элементарной силе крыла $dY_{кр}$. Соотношение (2.17) можем записать в виде

$$dY = \frac{4}{\pi^3} k(\beta) tg^2\beta \, dY_{кр}. \qquad (2.18)$$

Продольное распределение нагрузки на эквивалентном крыле $dY_{кр.}$ может быть получено из решения задачи об обтекании плоского треугольного крыла, например, методом дискретных вихрей С.М.Белоцерковского [32].

На рис. 36 пунктиром изображены расчетные кривые продольного распределения погонной нагрузки по уточненному методу плоских сечений.

Видим, что расчет по уточненному методу плоских сечений удовлетворительно согласуется с экспериментом А.Д.Коврижных [27] по всей длине смоченной поверхности пластины. Расчет же по методу плоских поперечных сечений в "чистом" виде дает завышенные значения нагрузок в области транца, и это расхождение увеличивается с увеличением угла дифферента.

Предложенное уточнение позволяет получить поправки (на удлинение) к результатам расчета по методу плоских сечений суммарных подъемной силы и момента, которые с учетом поправок хорошо согласуются с опытами.

Интегрируя элементарные силы из соотношения (2.18) по длине смоченной поверхности, для подъемной силы глиссирующей пластины получим

$$Y = \frac{4}{\pi^3} k(\beta)\, tg^2\beta\, Y_{кр}, \qquad (2.19)$$

где $Y_{кр}$ - подъемная сила эквивалентного крыла.

Для расчета величины $Y_{кр}$ можно воспользоваться формулой (2.20), достаточно хорошо аппроксимирующей расчет (по методу дискретных вихрей) и эксперимент для крыльев малого удлинения:

$$Y_{кр} = \frac{\rho V_0^2 S}{2}\, \frac{2\pi\alpha\lambda}{P\lambda+2}, \quad ^{x)} \qquad (2.20)$$

где параметр P представляет собой отношение полупериметра крыла к размаху; S - площадь соответствующего крыла; λ - удлинение крыла.

Величину P можно выразить через удлинение; для рассматриваемого треугольного крыла будем иметь (рис. 35)

$$P = \frac{c+\sqrt{c^2+\ell^2}}{2c} = \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{\lambda}\right)^2}\,\right],$$

так как $\lambda = \frac{(2c)^2}{S} = 4\frac{c}{\ell}$.

Подставляя в (2.19) выражение для подъемной силы крыла (2.20) и учитывая соотношение $\lambda = \frac{2\pi\alpha}{tg\,\beta}$ для подъемной силы глиссирующей пластины, получим

---

x) Формула (2.20), предложенная в работе [30], учитывает поправку теории несущей нити на конечность хорды (удлинения). Она дает возможность, как можно видеть по работе Р.И.Штейнберга [37], приближенно определять подъемную силу крыльев малого удлинения произвольной формы в плане.

$$Y = \mu_y \rho k(\beta) V_0^2 \alpha H^2, \qquad (2.21)$$

где $\mu_y = \frac{4}{P\lambda+2}$.

Функция μ_y может рассматриваться как поправка на взаимодействие сечений (на удлинение) к результату расчета подъемной силы по методу плоских сечений (2.13). Выражение для поправки при малых $\lambda \left(\frac{\lambda}{4} << 1\right)$ можно упростить

$$\mu_y = \frac{4}{P\lambda+2} \simeq \frac{2}{2+\frac{\lambda}{4}} \simeq 1-\frac{\lambda}{8}. \qquad (2.22)$$

Для положения центра давления треугольных крыльев малого удлинения Р.И.Штейнбергом в работе [37] предложена формула, аппроксимирующая результаты расчетов по методу дискретных вихрей:

$$\bar{x}_д = \frac{x_д}{\ell} = \frac{1}{3} + \frac{0.113}{P}. \qquad (2.23)$$

Используя выражение для подъемной силы (2.21) и координаты центра давления (2.23), получим формулу для момента гидродинамической подъемной силы:

$$M = Y x_д = \frac{1}{3}\mu_M \rho k(\beta) V_0^2 H^3, \qquad (2.24)$$

где $\mu_M = 3\mu_y \bar{x}_д \simeq \frac{4}{P\lambda+2}\left(1+\frac{1}{3P}\right)$.

Множитель μ_M в формуле (2.24), так же как и μ_y в (2.21), можно рассматривать как поправку к результату расчета момента по методу плоских сечений (2.14). Разложение μ_M при $\frac{\lambda}{4} << 1$ с точностью до линейных членов имеет вид

$$\mu_M = \frac{4}{P\lambda+2}\left(1+\frac{1}{3P}\right) \simeq 1+\frac{\lambda}{24}. \qquad (2.25)$$

Добавляя к полученным выражениям для гидродинамических подъемной силы (2.21) и момента (2.24) выражения (2.15), (2.16) для гидростатических составляющих, получим выражения для полных подъемной силы и момента:

$$Y = \mu_y \rho k(\beta) V_0^2 \alpha H^2 + \frac{2}{9}\rho g \frac{H^3}{\alpha\, tg\beta},$$
$$M = \frac{1}{3}\mu_M \rho k(\beta) V_0^2 H^3 + \frac{1}{18}\rho g \frac{H^4}{\alpha^2 tg\beta}. \qquad (2.26)$$

На рис. 37 расчет по формулам (2.26) сопоставляется с экспериментом А.И.Тихонова и Г.К.Колосова из работы [25] и Л.Д.Коврижных из работы [26]. Результаты приведены для $\alpha = 6^0$ и $\beta = 30^0$ в виде зависимостей коэффициентов $C_y = \frac{2Y}{\rho V_0^2 H^2}$ и $m_z = \frac{2M}{\rho V_0^2 H^3}$ от числа Фруда $F_r = \frac{V_0}{\sqrt{gH}}$. Можно видеть, что расчет хорошо согласуется с экспериментом. Видно также, что весомость воды дает малый вклад в подъемную силу и момент при больших числах Фруда, но этот вклад может быть значительным при малых числах Фруда.

Отметим, что поправка к результату расчета подъемной силы по методу плоских сечений, аналогичная (2.22), использовалась и раньше. В работе [33] она получена, исходя из приближенного учета продольного перетекания жидкости. Средняя интегральная поправка $\mu = \left(1+\frac{\pi^2 \lambda^2}{4 tg\beta}\right)^{-2}$ вводится множителем в выражение гидродинамической подъемной силы. Эта поправка оказывается по величине близкой к поправке μ_y (2.22), полученной выше. Однако, если использовать поправку Г.В.Логвиновича из работы [33] для вычисления момента, то получаются результаты, заметно меньшие экспериментальных, вследствие неучета при выводе этой поправки смещения центра давления от транца к носу пластины по сравнению с положением, даваемым методом плоских сечений.

Глава 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ГЛИССИРОВАНИЯ

Для глиссирующих объектов существуют неустойчивые режимы, то есть такие режимы, при которых, несмотря на отсутствие каких-либо явных внешних возмущений, самопроизвольно возникают нарастающие вертикальные и угловые колебания в продольной плоскости судна. С ростом скорости сужается область устойчивых режимов движения и увеличивается интенсивность колебаний. В частности, именно неустойчивость послужила причиной случаев гибели подавляющего большинства спортсменов, боровшихся за установление скоростных рекордов на воде.

Если испытать модель глиссирующего судна при различных скоростях движения, обеспечив ему две степени свободы - всплывание и дифферент, - и для каждой скорости создать (путем приложения соответствующих моментов) различные углы дифферента, то можно получить совокупность режимов, где модель устойчива, и режимов, где она неустойчива. Типичная диаграмма этих режимов в координатах α_c и V_c показана на рис. 38, где заштрихованы области неустойчивого движения.

Линии, разделяющие область устойчивого и неустойчивого движения, носят название границ устойчивости. Таких границ на рис. 38 три. Первая граница I, называемая в работах [7], [38] верхней, характеризуется режимами возникновения вертикальных колебаний. Эти колебания возникают и при одной степени свободы (по вертикали). Вторая 2 (средняя) и третья 3 (нижняя) границы связаны с появлением совместных угловых и вертикальных колебаний. Эти границы соединяются между собой в области малых скоростей.

Положение границ определяется в каждом отдельном случае геометрическими и динамическими характеристиками судна. При испытании моделей гидросамолетов обычно получают только первую и вторую границы областей неустойчивости. Всякому глиссирующему объекту соответствует определенная зависимость угла дифферента от скорости. Для обеспечения устойчивости необходимо, чтобы эта балансировочная кривая вплоть до расчетной скорости, проходила внутри устойчивой области, не пересекаясь с ее границами.

Понимание проблемы устойчивости глиссирования, разработка методов расчета и мер устранения были в основном достигнуты в результате теоретических и экспериментальных работ ЦАГИ в период 1938-1943 гг. [7], [38]. Эти работы, проводившиеся, в основном, Л.А.Эпштейном и А.П.Владимировым под руководством Л.И.Седова, в значительной части базировались на методах теории размерностей.

I. Анализ с помощью теории размерностей

Рассмотрим возмущенное движение плоской пластинки около установившегося состояния глиссирования. Пусть пластинка буксируется так, что поперечная ось, проходящая через центр тяжести, имеет постоянную горизонтальную скорость. Возмущенные движения представляют собой вращение около оси буксировки, которая может еще перемещаться по вертикали. Ниже излагаются основные сведения из работы [39]. В общем случае, при изучении устойчивости глиссирования, необходимо учитывать следующие параметры: ширину пластинки B; угол дифферента α_o; координаты центра тяжести ξ_o и η_o; нагрузку на воду Δ; момент инерции $\mathcal{J}$ относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести; общую массу*) объекта m, скорость движения V_o, плотность среды ρ и ускорение силы тяжести g. Вязкость не учтена, поскольку силы трения пластинки на порядок меньше подъемной силы (нагрузки), определяемой нормальными давлениями жидкости.

Режим, характеризующий границу устойчивой области, может быть записан в виде соотношения

$$F(\alpha_o, \rho, g, B, V_o, \Delta, \xi_o, \eta_o, m, \mathcal{J}) = 0.$$

Переходя с помощью обычных приемов к безразмерной форме, получим

$$f(\alpha_o, C_B, C_\Delta, \bar{\xi}_o, \bar{\eta}_o, \bar{m}, \bar{\mathcal{J}}) = 0, \qquad (3.I)$$

где

$$C_B = \frac{2\Delta}{\rho V_o^2 B^2}; \; C_\Delta = \frac{\Delta}{\rho g B^3}, \; \bar{\xi}_o = \frac{\xi_o}{B}, \; \bar{\eta}_o = \frac{\eta_o}{B}, \; \bar{m} = \frac{m}{\rho B^3}, \; \bar{\mathcal{J}} = \frac{\mathcal{J}}{\rho B^5}.$$

Для геометрически подобных пластинок с геометрически подобным положением центра масс выражение (3.I) упрощается и решенное относительно α_o принимает вид

$$\alpha_o = f_1(C_B, C_\Delta, \bar{m}, \bar{\mathcal{J}}). \qquad (3.2)$$

Разлагая (3.2) в ряд по степеням C_B, получим

$$\alpha_o = A_o + A_1 C_B + A_2 C_B^2 + \ldots, \qquad (3.3)$$

где коэффициенты A_o, A_1, A_2, ... являются функциями C_Δ, $\bar{m}$ и $\bar{\mathcal{J}}$.

*) Масса m и нагрузка Δ обычно связаны соотношением $\Delta = mg$, но в ряде случаев их можно и нужно рассматривать как независимые величины. В качестве примеров укажем на возможность аэродинамической разгрузки у гидросамолетов или разгрузки через блок при опытах в бассейне.

На рис. 39 показана зависимость $\alpha_o(C_B, C_\Delta)$, полученная в работе [7] для плоской пластинки при $\bar{m}$ = I и $\bar{\mathcal{J}}$ = 4. Как следует из рис. 39, в области $C_B <$ 0,I можно ограничиться первыми двумя членами разложения и считать $A_o = 0$. В этом случае для всех границ имеет место пропорциональность между α_o и C_B. Записав, что для каждой границы

$$\alpha_o = \frac{C_B}{k_i} = \frac{2}{k_i}\,\frac{\Delta}{\rho V_o^2 B^2}$$

(i = I,2,3 - номер границы на рис. 39), заметим, что величина k_1 для плоской пластинки, как следует из работы [39], не зависит от $\bar{m}$ и $\bar{\mathcal{J}}$ и для $C_\Delta >$ 0,5 может быть приближенно принята $k_1 \approx$ 0,35.

Величина k_2 в первом приближении зависит только от $\bar{\mathcal{J}}$. Эта зависимость показана на рис. 40. Значение k_3 существенно зависит от C_Δ и от $\bar{m}$. Влияние $\bar{\mathcal{J}}$ сравнительно слабое. Величину k_3 можно определить по формуле

$$k_3 = k_{3_1}\,\varphi_1\left(\frac{C_\Delta}{C_{\Delta 1}}\right)\varphi_2\left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}_1}\right)\varphi_3\left(\frac{\bar{\mathcal{J}}}{\bar{\mathcal{J}}_1}\right),$$

где k_{3_1} = I,I3 - значение k_3 при $C_{\Delta 1}$ = 0,37, $\bar{m}_1$ = I,08 и $\bar{\mathcal{J}}_1$ = 4,I; функции $\varphi_1 = \frac{k_3}{k_{3_1}}\left(\frac{C_\Delta}{C_{\Delta 1}}\right)$, $\varphi_2 = \frac{k_3}{k_{3_1}}\left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}_1}\right)$, $\varphi_3 = \frac{k_3}{k_{3_1}}\left(\frac{\bar{\mathcal{J}}}{\bar{\mathcal{J}}_1}\right)$ показаны на рис. 4I.

Каждой границе (при прямолинейном участке) соответствует определенная безразмерная частота собственных колебаний пластинки $\bar{\omega}_i = \frac{\omega_i B}{V_o}$.

Частота $\bar{\omega}_1$ зависит только от $\bar{m}$, $\bar{\omega}_2$ - от $\bar{\mathcal{J}}$. На частоту $\bar{\omega}_3$ влияет и $\bar{m}$ и $\bar{\mathcal{J}}$, от C_Δ она не зависит. Типичный характер изменения частоты $\bar{\omega}_2$ при увеличении момента инерции показана на рис. 40.

Приведенные выше рассмотрения относились к плоским пластинкам. Поперечная профилировка днища исследовалась в работах [38], [40]. В первом приближении профилированное днище можно заменить плоскокилеватым. Влияние килеватости сказывается в основном на первой границе, которая в координатах α_o и C_B смещается эквидистантно вверх на угол, приблизительно равный половине угла поперечной килеватости β. Иначе говоря, в формуле (3.3) надо положить

$$A_o = \frac{\beta}{2}.$$

На второй границе поперечная профилировка практически не сказывается. Влияние ее на третью границу изучено недостаточно.

2. Анализ на основе уравнений возмущенного движения (плоскокилеватая пластинка)

Рассмотрим устойчивость глиссирования на основе уравнений возмущенного движения плоскокилеватой пластинки на неполной ширине, следуя работам А.И.Тихонова [41] и Л.Д.Коврижных [42].

Пластинка глиссирует по спокойной поверхности воды, имея свободу вертикального перемещения и вращения относительно центра масс. Центр масс пластинки находится в диаметральной плоскости на расстоянии ξ_0 от транца вперед по килю и η_0 вверх от киля и движется с постоянной горизонтальной скоростью V_0. Невозмущенному движению соответствуют угол дифферента α_0 и длина смоченной части пластины по килю ℓ_0 (осадка по транцу $H_0 = \ell_0 \alpha_0$).

Движение рассматривается в подвижной системе координат, начало которой совпадает с центром масс в невозмущенном движении: ось Ox направлена горизонтально в сторону движения, ось Oy – вертикально вверх (рис. 42).

Пусть в результате действия возмущающих сил точка O приобрела малое вертикальное перемещение y, скорость $\dot{y}$, ускорение $\ddot{y}$ и пластина получила малое приращение угла дифферента $\theta = \alpha - \alpha_0$, малые угловую скорость $\dot{\theta}$ и ускорение $\ddot{\theta}$. Образовавшееся неустановившееся движение пластины удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y} &= Y - \Delta \\ J\ddot{\theta} &= M + M_{тр} \end{aligned}\right\}, \qquad (3.4)$$

где m и J – масса и момент инерции пластины; Δ – нагрузка на воду; Y и M – гидродинамическая подъемная сила и момент подъемной силы относительно начала координат; $M_{тр.}$ – момент силы трения.

Для невозмущенного движения пластины из (3.4) имеем

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Y_0 - \Delta \\ 0 &= M_0 + M_{тр_0} \end{aligned}\right\},$$

где индекс "0" внизу обозначает величины, относящиеся к невозмущенному движению.

В соотношениях (3.4) при $F_{r_\Delta} = \frac{V_0}{\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{\Delta}{\rho g}}}} > 3$ пренебрегается влиянием весомости ввиду его малости. Зависимостью подъемной силы от вязкости воды также можно пренебречь, так как при больших скоростях глиссирования подъемная сила пластины определяется в основном гидродинамическими нормальными давлениями.

Сила Y и момент M для стационарного глиссирования могут

быть определены, например, по гипотезе плоских сечений (см. раздел 2 главы 2). Для определения сил и моментов при нестационарном глиссировании полезно, как в работе [43], ввести понятие присоединенной массы клина. Тогда сила, действующая на единицу длины клина при его погружении, определится следующим выражением (сила равна секундному изменению импульса жидкости)

$$f = \frac{d}{dt}(m_{пр.} V_n), \qquad (3.5)$$

где $m_{пр.}$ – присоединенная масса единицы длины клина.

Используя формулу (2.10) для силы, действующей на единицу длины клина, погружающегося с постоянной скоростью V_n, несложно получить выражение для присоединенной массы

$$m_{пр} = k(\beta)\rho h^2, \qquad (3.6)$$

где h – погружение киля клина в рассматриваемом сечении (сечение АА на рис. 42).

Для вычисления силы f при погружении клина с переменной скоростью формула (3.5), с учетом выражения для присоединенной массы (3.6), приводит к выражению

$$f = \rho k(\beta) \frac{d}{dt}(h^2 V_n) = \rho k(\beta)(2h\dot{h}V_n + h^2 \dot{V}_n).$$

На основе приближенного учета энергии и импульса брызговых струй Г.В.Логвиновичем в работе [33] было уточнено инерционное слагаемое в выражении для силы f и в результате предложена формула

$$f = \rho k(\beta)[2h\dot{h}V_n + (2-\cos\beta)h^2 \dot{V}_n]. \qquad (3.7)$$

Пользуясь рисунком 42, можно величины h и V_n выразить через координату сечения ξ

$$\begin{aligned} h &= (\ell - \xi_0 - \xi)\alpha, \\ V_n = \dot{h} &= V_0\alpha - \dot{y} - \xi\dot{\theta}, \\ \dot{V}_n &= 2V_0\dot{\theta} - \ddot{y} - \xi\ddot{\theta}. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

В вышеприведенных формулах учтено также соотношение $\dot{\xi} = -V_0$. Подставляя в (3.7) выражения для h, V_n и $\dot{V}_n$ из (3.8) для силы f получим

$$f(\xi) = \rho k(\beta)[2(\ell-\xi_0-\xi)\alpha(V_0\alpha - \dot{y} - \xi\dot{\theta})^2 + (2-\cos\beta)\alpha^2(\ell-\xi_0-\xi)^2(2V_0\dot{\theta} - \ddot{y} - \xi\ddot{\theta})]. \qquad (3.9)$$

На элементарную призму, вырезанную в пластине двумя бесконечно близкими поперечными сечениями, взятыми на расстоянии $d\xi$ друг от друга, и имеющую абсциссу ξ, действует гидродинамическая сила

$$f(\xi)\,d\xi.$$

Полные гидродинамические подъемная сила и момент, приложенные к пластине, определятся интегралами:

$$Y=\int_{-\xi_0}^{l-\xi_0} f(\xi)\,d\xi,$$

$$M=\int_{-\xi_0}^{l-\xi_0} \xi f(\xi)\,d\xi, \qquad (3.10)$$

где $l = l_0 - \alpha_0 y - \frac{(l_0-\xi)}{\alpha_0}\theta$ – текущая длина смоченной части пластины по килю. Разлагая Y и M в ряды по малым параметрам $y, \dot y, \ddot y$; $\theta, \dot\theta, \ddot\theta$ и ограничиваясь линейными членами, будем иметь

$$Y(y,\dot y,\ddot y;\theta,\dot\theta,\ddot\theta) = Y_0 + Y^y_y + Y^{\dot y}_{\dot y} + Y^{\ddot y}_{\ddot y} + Y^{\theta}_{\theta} + Y^{\dot\theta}_{\dot\theta} + Y^{\ddot\theta}_{\ddot\theta}$$

$$M(y,\dot y,\ddot y;\theta,\dot\theta,\ddot\theta) = M_0 + M^y_y + M^{\dot y}_{\dot y} + M^{\ddot y}_{\ddot y} + M^{\theta}_{\theta} + M^{\dot\theta}_{\dot\theta} + M^{\ddot\theta}_{\ddot\theta}, \qquad (3.11)$$

где обозначено $Y^y = \frac{\partial Y}{\partial y}$, $Y^{\dot y} = \frac{\partial Y}{\partial \dot y}$ и т.д. Производные в разложениях (3.11) могут быть определены с помощью дифференцирования выражений (3.10) по соответствующим параметрам:

$$Y_0 = \rho k(\beta) V_0^2 l_0^2 \alpha_0^3, \qquad M_0 = \rho k(\beta)\left(\frac{l_0}{3}-\xi_0\right) V_0^2 l_0^2 \alpha_0^3,$$

$$Y^y = -2\rho k(\beta) V_0^2 l_0 \alpha_0^2, \qquad M^y = -2\rho k(\beta)\left(\frac{l_0}{2}-\xi_0\right) V_0^2 l_0 \alpha_0^2,$$

$$Y^{\dot y} = -2\rho k(\beta) V_0 l_0^2 \alpha_0^2, \qquad M^{\dot y} = -2\rho k(\beta)\left(\frac{l_0}{3}-\xi_0\right) V_0 l_0^2 \alpha_0^2, \qquad (3.12)$$

$$Y^{\ddot y} = -\frac{1}{3}(2-\cos\beta)\rho k(\beta) l_0^3 \alpha_0^2, \qquad M^{\ddot y} = -\frac{1}{3}(2-\cos\beta)\rho k(\beta)\left(\frac{l_0}{4}-\xi_0\right) l_0^3 \alpha_0^2,$$

$$Y^{\theta} = 2\rho k(\beta)\left(\frac{l_0}{2}+\xi_0\right) V_0^2 l_0 \alpha_0^2, \qquad M^{\theta} = -2\rho k(\beta)\xi_0^2 V_0^2 l_0 \alpha_0^2,$$

$$Y^{\dot\theta} = 2\rho k(\beta)\xi_0 V_0^2 l_0 \alpha_0^2, \qquad M^{\dot\theta} = -2\rho k(\beta)\left(\frac{l_0^2}{12}-\frac{l_0}{3}\xi_0+\xi_0^2\right) V_0 l_0^2 \alpha_0^2,$$

$$Y^{\ddot\theta} = -(2-\cos\beta)\rho k(\beta)\frac{l_0}{3}\left(\frac{l_0}{4}-\xi_0\right) l_0^2 \alpha_0^2, \qquad M^{\ddot\theta} = -(2-\cos\beta)\rho k(\beta)\frac{l_0}{3}\left\{\frac{l_0^2}{10}-\frac{l_0}{2}\xi_0+\xi_0^2\right\} l_0^2 \alpha_0^2.$$

В первой строке совокупности формул (3.12) представлены гидродинамические сила и момент в невозмущенном движении, во второй и пятой – позиционные производные, в третьей и шестой – демпфирующие члены вертикальных и угловых колебаний, в четвертой и седьмой – инерционные члены.

Анализ выражений (3.12) показывает, что гидродинамическая подъемная сила в невозмущенном движении приложена от транца пластины на расстоянии $\frac{l_0}{3}$, вертикальная инерционная сила приложена на расстоянии $\frac{l_0}{4}$, вертикальная демпфирующая сила – на расстоянии $\frac{l_0}{3}$, вертикальная восстанавливающая сила – на расстоянии $\frac{l_0}{2}$. Плечи вращательных составляющих сил зависят от координаты ξ_0. Если $\xi_0 = 0$, то вращательная инерционная сила приложена от транца пластины на расстоянии $\frac{2}{5} l_0$, вращательная демпфирующая сила – на бесконечно большом расстоянии и вращательная восстанавливающая

сила на транце.

Рассмотрим теперь момент сил трения относительно начала координат.

Для определения этого момента будем считать, что равнодействующая их горизонтальна и расположена на уровне невозмущенной свободной поверхности

$$M_{тр} = -X_{тр.}(\eta_0 - H), \qquad (3.13)$$

где $H = H_0 - y + \xi_0\theta$ – текущая глубина погружения пластины; $\eta_0 - H$ – плечо силы трения.

Величину силы трения будем рассчитывать по формуле

$$X_{тр.} = C_x \frac{\rho V_0^2}{2} S,$$

где C_x – коэффициент трения, взятый для числа Рейнольдса $R_e = \frac{V_0 l_0}{\nu}$, ν – коэффициент кинематической вязкости воды, $S = \frac{\pi}{2}\frac{H^2}{2\sin\beta}$ – площадь поверхности пластины, смоченной основным потоком. Выражение для возмущенного момента силы трения получается из формулы (3.13)

$$M_{тр} = M_{тр_0} + M^y_{тр} y + M^{\theta}_{тр}\theta,$$

где

$$M_{тр_0} = -C_x \rho\frac{V_0^2}{2} S_0(\eta_0 - H_0), \qquad (3.14)$$

$$M^y_{тр} = C_x \rho V_0^2 \frac{S_0}{H_0}\left(\eta_0 - \frac{3}{2}H_0\right),$$

$$M^{\theta}_{тр} = C_x \rho\frac{V_0^2}{2} S_0(\eta_0 - H_0).$$

Полученные выше выражения производных для подъемной силы и момента были проверены экспериментально в работе [44]. Колебания пластины были гармоническими и задавались с помощью двух кривошипно-шатунных механизмов (рис. 43). Экспериментальная установка монтировалась на буксировочной тележке опытового бассейна.

Испытания проводились с колебаниями двух видов: поступательными вертикальными и угловыми. В качестве примера рассмотрим методику получения производных при вертикальных колебаниях.

Проецируя силы, действующие на пластину (рис. 43), на ось Oy, получаем

$$m\ddot y = Y - (F_1 + F_2) - mg, \qquad (3.15)$$

где Y – гидродинамическая подъемная сила, F_1 и F_2 – силы, действующие на тензодатчики первой и второй стоек, посредством которых модель приводится в колебательное движение, m – масса глиссирующей пластины.

Разложение гидродинамической силы Y в ряд Тейлора по малым возмущениям $y, \dot y, \ddot y$ с учетом только линейных членов имеет вид

$$Y(y,\dot y,\ddot y) = Y(0,0,0) + Y^y(0,0,0)y + Y^{\dot y}(0,0,0)\dot y + Y^{\ddot y}(0,0,0)\ddot y + \dots .$$

Принимая во внимание закон движения пластины $y = r\cos\omega t$

(r - амплитуда колебаний, ω - круговая частота колебаний), получим из этого разложения частичную сумму ряда Фурье функции $Y(y,\dot{y},\ddot{y})$

$$Y(\omega t) = Y_0 + r(Y^{\dot{y}} - \omega^2 Y^{\ddot{y}})\cos\omega t - r\omega Y^{\dot{y}} \sin\omega t. \quad (3.16)$$

В результате гармонического анализа получались частичные суммы рядов Фурье записей сил F_1 и F_2 до первых гармоник

$$F_1 = A_1^0 + A_1^1 \cos\omega t + B_1^1 \sin\omega t,$$

$$F_2 = A_2^0 + A_2^1 \cos\omega t + B_2^1 \sin\omega t. \quad (3.17)$$

Подставляя в уравнение движения (3.15) разложения (3.16), (3.17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем соотношения для производных

$$Y_0 = A_1^0 + A_2^0 + mg,$$
$$Y^{y} - \omega^2 Y^{\ddot{y}} = \frac{A_1^1 + A_2^1}{r} - m\omega^2, \quad (3.18)$$
$$Y^{\dot{y}} = -\frac{B_1^1 + B_2^1}{r\omega}.$$

Аналогично получаются формулы для производных момента подъемной силы M. Моменты сил относительно транцевой точки киля удовлетворяют уравнению

$$M - (M_1\ell_1 + F_2\ell_2) - m x_{ц.т.}(\ddot{y} + g) = 0,$$

где M - момент гидродинамической подъемной силы, ℓ_1 и ℓ_2 - плечи сил F_1 и F_2, $x_{ц.т.}$ - координата центра тяжести пластины. Моменты в выписанном выше соотношении определяются относительно тра[...], как и в работе [44], данные из которой приводятся на рис. 44, 45.

Соотношения для производных момента, аналогичные соотношениям (3.18), имеют вид

$$M_0 = A_1^0\ell_1 + A_2^0\ell_2 + mg x_{ц.т.}$$
$$M^{y} - \omega^2 M^{\ddot{y}} = \frac{A_1^1\ell_1 + A_2^1\ell_2}{r} - m x_{ц.т.}\omega^2,$$
$$M^{\dot{y}} = -\frac{B_1^1\ell_1 + B_2^1\ell_2}{r\omega}.$$

Сопоставление экспериментальных результатов с расчетными производится на рис. 44, 45. Данные приведены в виде зависимостей коэффициентов производных $C_y^{\dot{y}} = \frac{2Y^{\dot{y}}}{\rho V H_0^2}$, $m_z^{\dot{y}} = \frac{2M^{\dot{y}}}{\rho V H_0^3}$, $C_y^{\bar{y}} - \bar{\rho}^2 C_y^{\ddot{\bar{y}}} = \frac{2}{\rho V^2 H_0}(Y^{y} - \omega^2 Y^{\ddot{y}})$, $m_z^{\bar{y}} - \bar{\rho}^2 m_z^{\ddot{\bar{y}}} = \frac{2}{\rho V^2 H_0^2}(M^{y} - \omega^2 M^{\ddot{y}})$ от числа Струхаля $\bar{\rho} = \frac{\omega H_0}{V}$ для угла дифферента $\alpha = 6^\circ$ и угла килеватости $\beta = 30^\circ$. Расчетные значения производных на рис. 44, 45 определялись с учетом поправок на удлинение (2.22) и (2.25), которые вводились мно-

жителями к соответствующим выражениям из соотношений (3.12).

Можно видеть, что расчет хорошо согласуется с экспериментом.

Аналогичные сопоставления, проведенные для производных подъемной силы и момента по $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$, получаемых из колебаний по углу дифферента, показали также достаточно хорошее согласование расчетных значений с экспериментальными.

Подставляя в уравнения движения (3.4) разложения (3.11) для Y и M с выражениями (3.12) и (3.14) для производных (с учетом поправок $\varkappa_y$ и $\varkappa_M$), получим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения пластины следующего вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{y} + a_{12}\dot{y} + a_{13}y + a_{14}\ddot{\theta} + a_{15}\dot{\theta} + a_{16}\theta = 0, \\ a_{21}\ddot{y} + a_{22}\dot{y} + a_{23}y + a_{24}\ddot{\theta} + a_{25}\dot{\theta} + a_{26}\theta = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.19)$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений (3.19) с постоянными коэффициентами ищется в виде

$$y = Ae^{\lambda t};\ \theta = Be^{\lambda t}.$$

Подстановка в уравнения (3.19) дает

$$A[a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda + a_{13}] + B[a_{14}\lambda^2 + a_{15}\lambda + a_{16}] = 0,$$
$$A[a_{21}\lambda^2 + a_{22}\lambda + a_{23}] + B[a_{24}\lambda^2 + a_{25}\lambda + a_{26}] = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda + a_{13} & a_{14}\lambda^2 + a_{15}\lambda + a_{16} \\ a_{21}\lambda^2 + a_{22}\lambda + a_{23} & a_{24}\lambda^2 + a_{25}\lambda + a_{26} \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получим алгебраическое уравнение четвертой степени, которое является характеристическим для системы (3.19)

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0.$$

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости по Ляпунову является отрицательность вещественной части корней характеристического уравнения или, по критерию Гурвица, удовлетворение неравенствам

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0;$$
$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.$$

Невыполнение последнего условия означает, что система колебательно неустойчива (случай $\Delta_3 = 0$ соответствует границе области устойчивости), а невыполнение какого-либо из остальных условий означает апериодическую неустойчивость системы. В наших расчетах получалась только область колебательной неустойчивости и всегда выполнялись неравенства $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$. Решение уравнения $\Delta_3 = 0$, то есть границу области колебательной неустойчивости, можно представить в виде функциональной зависимости $\alpha_0 = f(V_0)$.

Задача определения границ устойчивости была реализована на ЭВМ в работе [42].

Ответ на вопрос об устойчивости системы дает критерий Гурвица. Однако можно получить дополнительную информацию о степени устойчивости или неустойчивости, о периодах собственных колебаний, непосредственно решая характеристическое уравнение и определяя его корни.

В работе [46] получены также приближенные формулы для границ области неустойчивости и корней характеристического уравнения.

Расчет границ устойчивости из работы [42] сопоставляется на рисунке 46 с экспериментом.

Сопоставление показывает удовлетворительную сходимость результатов. Верхняя часть границы области колебательной неустойчивости, полученной в расчете, соответствует в терминах работ [7], [38] средней границе, а нижняя часть – нижней границе устойчивости.

Теория размерностей позволяет сократить число определяющих параметров задачи путем перехода к безразмерным величинам (см. раздел I главы 3, а также работу [38]). Если выбрать в качестве основных параметров нагрузку на воду Δ, массу m, плотность воды ρ и обозначить величину, имеющую размерность длины, через $L = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$, то получим уравнение границы устойчивости в безразмерном виде:

$$\alpha_0 = f(\bar{J}, \beta, \bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{V}_0, \bar{g}, \bar{Re}),$$

где

$$\bar{J} = \frac{J}{\rho L^5}, \quad \bar{\xi}_0 = \frac{\xi_0}{L}, \quad \bar{\eta}_0 = \frac{\eta_0}{L}, \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{\Delta}{\rho L^2}}}, \quad \bar{g} = \frac{gm}{\Delta}, \quad Re = \sqrt{\frac{\Delta}{\rho \nu^2}}.$$

Влияние безразмерных параметров на расчетные границы устойчивости в соответствии с работой [42], показано на рис. 47–49 (в этих расчетах Δ = 270 н, m = 27 кг).

Как можно видеть на рис. 47, с увеличением момента инерции $\bar{J}$ средняя граница значительно, а нижняя незначительно понижаются. С увеличением угла килеватости β (рис. 48) границы поднимаются вверх, причем средняя поднимается более существенно.

Увеличение высоты центра тяжести $\bar{\eta}_0$ (рис. 49) приводит к сужению области неустойчивости. Горизонтальная координата $\bar{\xi}_0$ и число Рейнольдса $\bar{Re}$ незначительно влияют на границы.

На рис. 50 приводится влияние массы (нагрузка на воду Δ при этом сохраняется неизменной). С увеличением массы область неустойчивости расширяется, при этом средняя граница поднимается, нижняя понижается, а вся область неустойчивости передвигается в область малых скоростей V_0.

Влияние нагрузки $\Delta = mg$ (без разгрузки) показано на рис. 51. С уменьшением нагрузки границы снижаются, область неустойчивости при этом сужается.

Для изучения устойчивости конкретного глиссирующего объекта, форма днища которого может значительно отличаться от плоскокилеватой, на основе уравнений возмущенного движения необходимо знание гидродинамических подъемной силы и момента, действующих на него при глиссировании с малыми колебаниями.

Часть II. БЫСТРЫЙ ВХОД ТЕЛ В ВОДУ

Глава 4. БЫСТРОЕ ПОГРУЖЕНИЕ КИЛЕВАТЫХ ТЕЛ В ВОДУ

I. Удар плавающих тел

Задачи на удар плавающих тел ставятся следующим образом. Пусть имеем твердое тело, плавающее на горизонтальной поверхности идеальной, несжимаемой жидкости, занимающей все нижнее полупространство. До удара тело и жидкость покоятся. В результате внешнего импульса, приложенного к телу, оно, а вместе с ним и жидкость начинают двигаться. Выясним условия, которые позволяют определить движение жидкости и тела после удара. Выберем систему координат, как показано на рис. 52. Плоскость xOy горизонтальна и совпадает со свободной поверхностью, ось Oz направлена вертикально вниз.

Обозначим через $\bar{u}$ скорости частиц жидкости. Динамическое уравнение Эйлера для идеальной жидкости в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\, grad\, p + \bar{F},$$

где ρ - плотность, p - давление, $\bar{F}$ - массовые внешние силы, которые будем считать конечными. Считая, что удар происходит за очень короткое время τ, интегрируя это уравнение по времени от 0 до τ, переходя далее к пределу при $\tau \to 0$ и обозначая

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^{\tau} p\, dt = p_t ,$$

получим

$$\bar{u} = -\frac{1}{\rho}\, grad\, p_t ,$$

так как

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^{\tau} \bar{F}\, dt = 0$$

; p_t есть импульсивное давление.

Таким образом, непосредственно после удара поле скоростей жидкости будет иметь потенциал, который обозначим буквой φ, так что

$$\bar{u} = grad\, \varphi$$

$$\varphi = -\frac{p_t}{\rho} . \qquad (4.1)$$

На свободной границе давление $p = p_0$; p_0 есть атмосферное давление, которое конечно, поэтому импульсивное давление $p_t = 0$, и, следовательно, на свободной границе (на плоскости xOy вне тела)

$$\varphi = 0. \qquad (4.2)$$

На поверхности тела после удара скорость жидкости вдоль нормали к поверхности тела (внешней по отношению к жидкости) $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$

должна быть равна проекции скорости соответствующей точки поверхности тела на нормаль v_n, следовательно, граничное условие на поверхности Σ_1 (см. рис. 52) будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n . \qquad (4.3)$$

На бесконечно больших расстояниях от тела жидкость покоится, и поэтому

$$(grad\, \varphi)_\infty = 0 .$$

Таким образом, приходим к краевой задаче смешанного типа: определению потенциала $\varphi(x,y,z)$, удовлетворяющего в нижнем полупространстве вне поверхности Σ уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$ и условиям (4.2) и (4.3) на границах этой области.

Условие (4.2) позволяет аналитически продолжить потенциал φ в верхнее полупространство при помощи соотношения

$$\varphi(x,y,z) = -\varphi(x,y,-z). \qquad (4.4)$$

В результате аналитического продолжения получим, что потенциал $\varphi(x,y,z)$ будет определен во всем пространстве вне симметричной поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2$ (см. рис. 52).

В соответствии с соотношением (4.4) для проекции скорости жидкости на оси координат будем иметь:

$$\begin{aligned} v_x(x,y,z) &= -v_x(x,y,-z), \\ v_y(x,y,z) &= -v_y(x,y,-z), \qquad (4.5) \\ v_z(x,y,z) &= v_z(x,y,-z) . \end{aligned}$$

Пусть α, β, γ - направляющие косинусы внешней по отношению к жидкости нормали в точке P_1, лежащей на поверхности Σ_1 (см. рис. 52), тогда направляющие косинусы в симметричной точке P_2 будут α, β, $-\gamma$. Учитывая это, а также учитывая равенства (4.5), получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{P_1} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{P_2} , \qquad (4.6)$$

то есть в симметричных точках проекции равны между собой по величине, но противоположны по знаку.

Условие (4.6) позволяет сформулировать задачу Неймана о нахождении гармонической функции в области, внешней по отношению к поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2$ при заданном значении $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на этой поверхности.

Известно [47], что задача Неймана и смешанная задача имеют каждая единственное решение. Отсюда следует, что так поставленная задача Неймана и соответствующая смешанная задача для нижнего полупространства дают в нижнем полупространстве полностью эквивалентные решения.

Условие (4.6) соблюдается для полученного симметричного тела в том случае, когда после удара тело движется в вертикальном направлении или вращается относительно горизонтальной оси, то есть когда выполняются условия $U_x = U_y = \Omega_z = 0$. Здесь U_x и U_y проекции на оси Ox и Oy скорости $\bar{U}$ тела, Ω_z - проекция угловой скорости тела на ось Oz. Движение жидкости представляет собой потенциальное течение вне полученного симметричного твердого тела. Отсюда следует, что присоединенная масса или присоединенный момент инерции при вертикальном ударе плавающего тела равны половине присоединенной массы или момента инерции движущегооя в бесконечной жидкости симметричного тела, полученного зеркальным отображением погруженной под свободной поверхностью его части.

При горизонтальном ударе условие (4.6) требует, чтобы движение бесконечной жидкости рассматривалось не как результат движения одного твердого тела, а как результат удара при соскальзывании с равными, но противоположными по знаку скоростями двух симметричных твердых тел по плоскости их симметрии.

Методы решения задач этого типа известны, они вошли в курсы гидромеханики, и к настоящему времени получено большое количество конкретных результатов как для плоских, так и для пространственных течений. Поэтому, не останавливаясь подробно на теории удара плавающих тел, сформулируем лишь основные результаты.

Во всех этих случаях совокупность импульсивных давлений, приложенных к жидкости со стороны поверхности тела, сводится к главному вектору $\bar{B}$ импульса, или количества движения, и главному вектору $\bar{M}$ импульсивного момента, или момента количества движения жидкости, которые выражаются через присоединенные массы, компоненты которых, вообще говоря, имеют различные значения по разным осям. Известно, что присоединенные массы и моменты инерции зависят от формы и размеров тела, от формы свободной поверхности (если тело плавает), они пропорциональны плотности жидкости ρ и не зависят от скорости тела после удара. В частности, при вертикальном симметричном ударе $B_z = m_z^* V_z$ и кинетическая энергия жидкости

$$T = m_z^* \frac{V_z^2}{2} = \frac{1}{2} B_z V_z .$$

Для пластинки шириной 2c, плавающей на поверхности жидкости в плоскости xOy, при ударе вдоль оси Oz присоединенная масса на единицу длины будет $m_z^* = \frac{\pi}{2} \rho c^2$; для цилиндра радиуса r, погруженного наполовину, при таком же ударе присоединенная масса на единицу длины $m_z^* = \frac{\pi}{2} \rho r^2$; для полупогруженного шара радиуса r присоединенная масса при аналогичном ударе имеет вид $m_z^* = \frac{\pi}{3} \rho r^3$; значения присоединенных масс для других случаев можно найти в работе [48].

2. Быстрое погружение килеватых тел в воду

На рис. 53 изображены типичные профили поперечных сечений корпуса лодки гидросамолета или глиссера в районе расположения центра тяжести. Для смягчения ударов при посадке гидросамолетов на воду и снижения перегрузок в условиях глиссирования по волне днище вблизи киля имеет килеватую форму, обычно - клин с плоскими гранями. Угол его поперечной килеватости принято обозначать буквой β. У современных летающих лодок этот угол лежит в пределах 20°-30°, у глиссирующих судов 10-15°. Вблизи скул наклон днища к горизонту постепенно уменьшается с целью снижения высоты брызговых струй, образующихся на краях смоченной поверхности днища. Контур днища в этих местах обычно описывают по окружности соответственно подобранным радиусом R. Эту часть днища называют туннелем.

В практике строительства глиссирующих судов использовались и более сложные обводы корпусов, например, со скругленным килем или скулами, продольными реданами, продольными изломами днища, острыми килями и развитыми туннелями и т.д. Мы ограничимся рассмотрением более или менее простых форм корпусов, близких к плоскокилеватым, так как этот тип корпусов имеет самое широкое практическое применение. Заметим кстати, что способы и методы исследования корпусов этого типа достаточно развиты и могут быть представлены в систематическом изложении.

Ключевой задачей гидродинамики гидросамолета и глиссера является задача о быстром вертикальном входе в воду твердого тела, ограниченного снизу контуром, совпадающим с контуром поперечного сечения корпуса. Метод плоских поперечных сечений, основы которого изложены в разделе 2 гл. II позволяет использовать результаты решения такой задачи для расчета гидродинамических характеристик реальных глиссирующих корпусов.

Явление быстрого вертикального погружения тела в воду, часто сокращенно называемое "ударом тела о поверхность воды", принципиально отличается от рассмотренного в предыдущей главе удара плавающего тела. В этом случае смоченная ширина тела изменяется со временем, а свободная поверхность воды деформируется, резко искривляясь вблизи тела с образованием струй и всплесков.

Рассмотрим плоскую задачу. Движение жидкости (абсолютное), отнесем к системе осей координат xOy, связанной с погружающимся симметричным контуром. Начало координат возьмем на киле сечения, ось Ox направим горизонтально вправо, ось Oy – вертикально вверх. Пусть тело движется вниз по направлению оси Oy со скоростью V, в общем случае зависящей от времени.

На рис. 54 показано последовательное развитие формы поверхности жидкости по мере погружения клина. В начальный момент времени тело в точке 0 соприкасается с невозмущенной свободной поверхностью, совпадающей с осью Ox. В последующие моменты времени клин начинает входить в воду, раздвигая ее в стороны. Вытесненная вода устремляется вверх и в стороны, образуя брызговые струи.

Наблюдения показывают, что свободная поверхность воды ведет себя подобно нерастяжимому листу, разрезанному по линии первоначального соприкосновения тела с невозмущенной поверхностью воды. При входе клина в воду края разреза резко отгибаются наружу (рис. 54Б). Теоретические исследования показывают, что до тех пор, пока вершины брызговых струй не сходят со щек клина, свободная поверхность состоит из одних и тех же частиц жидкости, а расстояния между любыми двумя частицами, измеренные вдоль дуги свободной поверхности, сохраняются неизменными при постоянной скорости погружения клина.

Достигнув скулы клина, брызговая струя выходит в атмосферу (рис. 54В), причем на участках между скулой и вершиной ее поверхность состоит из частиц, вышедших на свободную поверхность из более глубоких слоев.

При дальнейшем погружении клина (рис. 54Г и 54Д) происходит формирование каверны за погружающимся телом и течение постепенно переходит в струйное обтекание клина.

Вернемся к первой стадии входа тела в воду.

Первым, кто пытался вычислить силу сопротивления погружающегося килеватого тела, был Т.Карман [49], который в 20-ые годы предложил, учитывая малость угла β, вычислять силу сопротивления по формуле

$$P=\frac{d}{dt}(m_{np}V),$$

где $m_{np.}$ – присоединенная масса при ударе плоской пластинки, плавающей по поверхности воды:

$$m_{np.}=\frac{\pi\rho c^2}{2}.$$

Ширину поверхности удара 2c предлагалось считать переменной, зависящей от времени t величиной. Карман брал ее равной ширине сечения погружающегося профиля плоскостью невозмущенной поверхности воды (см. рис. 55А).

Предложенный Карманом метод потребовал существенных уточнений, так как сопоставление результатов расчетов с данными экспериментов показало, что действительная сила сопротивления почти в два раза превышает теоретическую величину.

В начале 30-х годов теорию усовершенствовал Герберт Вагнер (Германия), который предложил учитывать фактическое увеличение смоченной ширины тела 2c за счет подъема свободной поверхности воды, вызванного погружением тела (см. рис. 55Б).

Работа Вагнера была опубликована в обширной статье [9] в 1932 г. и содержит результаты его исследований по посадочному удару гидросамолетов и глиссированию. Она до сих пор сохранила свое научное значение. Помимо излагаемого ниже приближенного решения задачи о входе в воду слабокилеватого тела в ней доказываются некоторые общие теоремы о свойствах струйных течений жидкости со свободными границами и дается постановка задачи об автомодельном погружении клина ($V=const$) конечной килеватости. Пользуясь рядом установленных Вагнером теорем, можно приближенно рассчитать течение и величину силы сопротивления при погружении клина. Вагнер приводит пример такого расчета для клина с углом килеватости $\beta=18^0$.

В 1950 г. в США была опубликована работа Джона Пирсона [50], в которой содержатся аналогичные расчеты для клиньев с углами килеватости 20^0, 30^0, 40^0 и 50^0. Помимо формы свободной поверхности и силы сопротивления в этой работе определено распределение давлений на гранях клинов.

Решение задачи о расчете автомодельного погружения клиньев и конусов с применением ЭВМ было опубликовано в нашей стране Борисовой Э.П., Корявовым П.П. и Моисеевым Н.Н. в 1959 г. [51].

Дальнейших крупных результатов добился в 1958–1969 гг. Г.В.Логвинович [24],[33], решивший ряд новых задач о погружении тел в жидкость (погружение конуса, открытие функционального характера силы сопротивления при погружении со сходом струй с кромок тела и др.). Большой шаг был сделан З.Н.Добровольской, которой удалось свести задачу об автомодельном погружении клина к интегральному сингулярному уравнению, решение которого может быть получено численными методами [52],[53]. Сама З.Н.Добровольская выполнила такие расчеты для острых клиньев $\beta \geqslant 60^0$.

Экспериментальные исследования силы сопротивления клиньев и конусов были выполнены в ЦАГИ О.П.Шорыгиным [55], С.И.Головиным и Ю.Ф.Журавлевым [56].

Перейдем к предложенному Г.Вагнером приближенному решению задачи о погружении слабокилеватого симметричного тела при следующих допущениях:

I) жидкость принимается несжимаемой, невесомой и лишенной вязкости; влиянием воздуха, заполняющего верхнюю часть пространства, пренебрегаем;

2) тело имеет малую килеватость, так что отношение скорости его погружения к скорости расширения смоченной поверхности - малая величина;

3) возмущение свободной поверхности жидкости будем считать малым, поэтому граничные условия на поверхности тела и на свободной поверхности жидкости будем сносить на горизонтальную ось Ox;

4) в начальный момент времени жидкость покоится. Следовательно, ее движение после начала погружения тела будет потенциальным.

Математическая задача сводится к следующей: найти потенциальное движение жидкости в нижней полуплоскости ($y \leqslant 0$), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

а) на смоченной поверхности тела $(|x| \leqslant c,\ y=0)$ вертикальная составляющая скорости жидкости

$$V_y = -V\cos\beta \cong -V = const$$

б) на свободной поверхности жидкости $(|x|>c,\ y=0)$ давление жидкости постоянно и равно атмосферному давлению p_0 ;

в) вдали от тела при $x^2+y^2 \to \infty\ (y \leqslant 0)\ V_x = V_y = 0$.

Начальное условие для $t=0,\ V_x = V_y = 0$.

Рассмотрим граничное условие на свободной поверхности $(|x|>c,\ y=0)$. В силу того, что мы считаем деформации поверхности жидкости небольшими, естественно в интеграле Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{V_x^2+V_y^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} \tag{4.7}$$

для потенциального движения пренебречь квадратами возмущенных скоростей. Тогда избыточное давление $\Delta p = p - p_0$ будет

$$\Delta p = -\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{4.8}$$

На свободной поверхности оно равно нулю, поэтому $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ и, следовательно, $\varphi = const$.

Функция φ определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому можно принять на свободной поверхности

$$\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что на свободной поверхности жидкости отсутствует горизонтальное движение $V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, и жидкость может перемещаться только вертикально.

Задача сводится теперь к определению в нижней полуплоскости функции потенциала $\varphi(x,y,t)$, гармонической относительно переменных x и y , обращающейся на участках горизонтальной оси координат $|x|>c$, в нуль и имеющей на участках $|x| \leqslant c$ этой оси производную

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -V = const.$$

Эти условия совпадают с условиями задачи об ударе плоской пластины ширины 2с, плавающей на поверхности невозмущенной жидкости. Решение этой последней задачи известно. Если ввести комплексное переменное $z = x+iy$ и обозначить через W комплексный потенциал скоростей абсолютного движения

$$W = \varphi(x,y,t) + i\psi(x,y,t),$$

где $\psi(x,y,t)$ - функция тока, то для этой задачи имеет место равенство

$$W = Vzi - Vi\sqrt{z^2-c^2}. \tag{4.9}$$

Дифференцируя $W(z,t)$ по z , получим

$$\frac{dW}{dz} = V_x - iV_y = Vi - \frac{Vi\,z}{\sqrt{z^2-c^2}}. \tag{4.10}$$

При $z \to \infty$ $\frac{dW}{dz} \to 0$.

На свободной поверхности жидкости $z = x$ и при $|x|>c$

$$V_x = 0,\quad V_y = \frac{V}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}} - V.$$

Так как при обходе точек $z = \pm c$ со стороны свободной поверхности по малым полуокружностям, лежащим в нижней полуплоскости, $\sqrt{z^2-c^2} = -i\sqrt{c^2-x^2}$, то потенциал на поверхности пластины

$$W = Vzi - V\sqrt{c^2-z^2} \tag{4.11}$$

и, после дифференцирования по z,

$$\frac{dW}{dz} = V_x - iV_y = Vi + \frac{Vz}{\sqrt{c^2-z^2}}. \tag{4.12}$$

На поверхности пластины $y=0,\ z=x,\ |x| \leqslant c$

$$V_y = -V$$

$$V_x = \frac{Vx}{\sqrt{c^2-x^2}}.$$

Полученное решение показывает, что при сделанных допущениях движение жидкости в процессе погружения тела в каждый момент времени будет таким же, как при ударе с мгновенной скоростью V плоской пластины, смоченная ширина которой равняется смоченной ширине тела, плавающего на спокойной жидкости.

Займемся теперь определением зависимости смоченной ширины

ела $2c$ от времени t . Рассмотрим относительное движение жидкос-
и в системе координат, в которой горизонтальная ось Ox проходит
ерез точку киля 0 (рис. 56).

Вертикальная скорость частиц жидкости на свободной поверхно-
ти в этой системе координат равняется

$$V_y = \frac{V(t)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}}, \tag{4.13}$$

де $V(t)$ - заданная функция времени.

Уравнение свободной поверхности жидкости $y = \eta(x,t)$ в ин-
тральной форме имеет вид

$$\eta = \int_0^t V_y\, dt = \int_0^t \frac{V dt}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}}.$$

тественно считать, что существует однозначная функциональная
висимость $t = t(c)$. Заменим переменное t на c :

$$\eta = \int_0^c \frac{V}{\frac{dc}{dt}} \cdot \frac{dc}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}}.$$

эдем функцию

$$u(c) = \frac{V}{\frac{dc}{dt}}, \tag{4.14}$$

яющуюся отношением скорости погружения тела к половине скорос-
расширения его смоченной поверхности.

Тогда

$$\eta(x,c) = \int_0^c \frac{u(c)\,dc}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}}.$$

Фиксируем некоторую частицу свободной поверхности с начальной
цссой $x\ (|x| > c)$ и будем следить за ее движением с течени-
ремени (рис. 56). Росту времени t соответствует возрастание
еменной C . В тот момент, когда величина C , возрастая, дос-
ет величины x , рассматриваемая частица должна достичь по-
ности тела. Обозначая через $y = f(x)$ уравнение поверхности
, получим

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(c)\,dc}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}}. \tag{4.15}$$

жение (4.15) представляет собой интегральное уравнение Вагне-
ля определения функции $u(c)$.

Прежде чем переходить к общему решению уравнения Вагнера,
отрим важный частный случай.

Положим, что $u = const$ и определим, какова соответствующая
тела:

$$f(x) = u \cdot x \cdot \int_0^1 \frac{d\left(\frac{c}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}} = u \cdot x \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, что тело имеет форму клина с прямолинейными гранями.
При килеватости клина β -

$$f(x) = x\, tg\, \beta .$$

Сопоставление с предыдущим соотношением даст

$$u = \frac{2}{\pi} tg\, \beta . \tag{4.16}$$

Теперь можно найти погружение клина относительно невозмущенной
поверхности. Очевидно,

$$u = \frac{V}{\frac{dc}{dt}} = \frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{dc}{dt}} = \frac{dh}{dc},$$

откуда $h = \int_0^c u\, dc$,

Для $u = \frac{2}{\pi} tg\, \beta = const$

$$h = u \cdot c = \frac{2}{\pi} tg\, \beta \cdot c . \tag{4.17}$$

С другой стороны, как видно из рис. 57, $h = c_0\, tg\, \beta$, где c_0 -
полуширина клина, отсекаемая уровнем невозмущенной поверхности
воды.

Сравнивая два полученных выражения для h , получаем соотноше-
ние

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\pi}{2} = const , \tag{4.18}$$

не зависящее от угла килеватости.

Следует отметить, что этот вывод носит приближенный характер
и справедлив для малых значений β . Он основан на допущении о
замене границы области $ABCDE$, занятой жидкостью (рис. 58),
вещественной осью. Фердинандом [35] было получено решение анало-
гичной задачи при лучшем приближении к действительной границе
(рис. 58 - граница $A'B'C'D'E'$). Решение задачи в постановке
Фердинанда позволило ему получить зависимость $\frac{c}{c_0} = f(\beta)$ (рис. 59).
При $\beta \to 0$ в решении Фердинанда $\frac{c}{c_0} \to \frac{\pi}{2}$, как и у Вагнера,
но затем с ростом β , особенно при $\beta > 30^0$, это отношение на-
чинает достаточно энергично уменьшаться, достигая величины $\frac{c}{c_0} = 1$
при $\beta = \frac{\pi}{2}$. Из вычислений Фердинанда и некоторых наших опытов
следует, что при $0 \leq \beta \leq 30^0$ можно с достаточной степенью точ-
ности пользоваться отношением $\frac{c}{c_0} = \frac{\pi}{2}$.

Самим Вагнером для решения уравнения (4.15) был предложен метод полиномов.

Пусть функция $u(c)$ может быть записана в виде

$$u(c)=A_1+A_2c+A_3c^2+\ldots+A_nc^{n-1},$$

где $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ – некоторые вещественные числа. Тогда, на основании (4.I5)

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} A_i\int_0^x \frac{c^{i-1}dc}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}}$$

или

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i x^i\int_0^x \frac{\left(\frac{c}{x}\right)^{i-1}d\left(\frac{c}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}}=\sum_{i=1}^{n}A_i x^i\int_0^1\frac{\tau^{i-1}d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Отсюда следует, что и $y(x)$ нужно задать в виде полинома

$$y(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

где

$$a_i=A_i\int_0^1\frac{\tau^{i-1}d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\frac{A_i}{K_i}.$$

Поскольку заданной функцией является $y(x)$ то, $A_i=K_i a_i$.

Вычислим сначала K_1 и K_2:

$$K_1=\frac{1}{\int_0^1\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}}=\frac{2}{\pi},$$

$$K_2=\frac{1}{\int_0^1\frac{\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}}=\frac{1}{-\sqrt{1-\tau^2}\Big|_0^1}=1.$$

При произвольном числе n

$$K_n=\frac{1}{J_n}, \qquad \text{где } J_n=\int_0^1\frac{\tau^{n-1}d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Последнее выражение допускает следующие преобразования:

$$J_n=\int_0^1\tau^{n-2}\frac{\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\int_0^1(n-2)\tau^{n-3}\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau=$$

$$=(n-2)\int_0^1\tau^{n-3}(1-\tau^2)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Таким образом, мы получили рекуррентное соотношение

$$J_n=(n-2)(J_{n-2}-J_n),$$

откуда

$$J_n=\frac{n-2}{n-1}J_{n-2}.$$

Замечая, что $J_1=\frac{\pi}{2}$ и $J_2=1$, получим при n – четном ($n>2$)

$$J_n=1\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(n-2)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(n-1)}$$

$$K_n=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots(n-2)}$$

При n – нечетном ($n>2$)

$$J_n=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-2)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(n-1)}$$

$$K_n=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots(n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(n-2)}$$

Из формул для K_n следует очевидное соотношение

$$K_{n+1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{K_n}.$$

При больших значениях n справедлива асимптотическая формула

$$K_n\approx0{,}81\sqrt{n-1{,}5}.$$

Первые 49 значений K_n приведены в табл. 3.

Таблица 3

	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0	–	0,637	I,000	I,274	I,500	I,698	I,875	2,038	2,I88	2,329
I	2,46I	2,588	2,707	2,823	2,932	3,040	3,I42	3,243	3,338	3,433
2	3,524	3,6I4	3,700	3,786	3,868	3,95I	4,029	4,I09	4,I84	4,26I
3	4,333	4,408	4,478	4,550	4,6I7	4,688	4,753	4,822	4,885	4,952
4	5,0I4	5,079	5,I39	5,203	5,26I	5,324	5,38I	5,442	5,50I	5,558

Таким образом, погружающемуся профилю, заданному полиномом

$$y=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n, \tag{4.I9}$$

соответствует решение интегрального уравнения Вагнера

$$u=K_1a_1+K_2a_2c+\ldots+K_na_nc^{n-1}. \tag{4.20}$$

Пример I. Погружение цилиндра. Уравнение окружности радиуса R, проходящей через начало координат (см. рис. 60), имеет вид

$$y=R-\sqrt{R^2-x^2}=R\left\{1-\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]^{1/2}\right\}.$$

Для небольших глубин погружения, когда $\frac{x}{R}\ll1$ имеем

$$y\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{R}.$$

Следовательно, $n=2$, $a_1=0$, $a_2=\frac{1}{2R}$ и $u=\frac{c}{2R}$.

Пример 2. Большинство килеватых профилей поперечных сечений лодок гидросамолетов и глиссеров может быть выражено функцией

$$y=a_1x-a_nx^n \tag{4.2I}$$

(см. [58]).

Полуширина сечений далее принята равной 1. Коэффициенты a_1, a_n подбираются по основным параметрам профиля следующим образом (см. рис. 6I). Внутренний угол поперечной килеватости β определяет коэффициент a_1, так как $tg\beta=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=a_1$. Внешний угол поперечной килеватости β' вместе с β определяют коэффициент a_n, потому что на скуле (x = I)

$$y_{скулы} = 1 \cdot tg\beta' = a_1 - a_n = tg\,\beta - a_n$$

$$a_n = tg\beta - tg\beta'.$$

Для определения степени n потребуем, чтобы в экстремальной точке днища (x_*, y_*):

$$y_* = a_1 x_* - a_n x_*^n$$

$$y_*' = 0 = a_1 - n a_n x_*^{n-1},$$

откуда

$$\frac{1}{n} = \frac{a_n x_*^{n-1}}{a_1} = \frac{a_n x_*^n}{a_1 x_*} = \frac{a_1 x_* - y_*}{a_1 x_*} = 1 - \frac{y_*}{x_* tg\beta}.$$

Показатель n по этой формуле получается в виде неправильной дроби, иногда довольно большой (40+50). Для удобства вычисления обычно достаточно взять ближайшее к неправильной дроби целое число.

Определив числа a_1, a_n, n, получаем решение для $u(c)$

$$u(c) = K_1 a_1 - K_n a_n c^{n-1}. \qquad (4.22)$$

Значения смоченной полуширины c здесь так же, как и координаты x, отнесены к полуширине сечения лодки.

На рис. 62 показаны примеры профилей днища, задаваемые в виде полиномов $y = a_1 x - a_n x^n$ $(tg\beta = 0,5)$.

Интегральное уравнение Вагнера может быть легко сведено к уравнению Абеля, для которого известно решение [59]. На это впервые обратил внимание Толькмен (Германия) в 1934 г. [60]. Более простую формулу решения дал Г.К.Колосов в 1960 г. [54].

Преобразуем уравнение Вагнера (4.15)

$$y(x) = \int_0^x \frac{u(c)\,dc}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{x}\right)^2}}$$

к виду

$$\frac{y(x)}{x} = \int_0^x \frac{u(c)}{2c} \cdot \frac{2c\,dc}{\sqrt{x^2-c^2}}.$$

Вводя подстановки $x^2 = \xi$; $c^2 = \gamma$; $z^2 = \zeta$;

$$f_1(\xi) = \frac{y(x)}{x}; \; f_2(\gamma) = \frac{u(c)}{2c},$$

получим

$$f_1(\xi) = \int_0^\xi \frac{f_2(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{\xi-\gamma}}$$

(уравнение Абеля). Умножим обе части этого выражения на $\frac{d\xi}{\sqrt{\zeta-\xi}}$ и проинтегрируем его по ξ от 0 до ζ (интегрирование ведется по заштрихованной площади рис. 63):

$$\int_0^\zeta \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\zeta-\xi}} = \int_0^\zeta \frac{d\xi}{\sqrt{\zeta-\xi}} \cdot \int_0^\xi \frac{f_2(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{\xi-\gamma}}.$$

В правой части изменим порядок интегрирования

$$\int_0^\zeta \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\zeta-\xi}} = \int_0^\zeta f_2(\gamma)\,d\gamma \int_\gamma^\zeta \frac{d\xi}{\sqrt{(\zeta-\xi)(\xi-\gamma)}}. \qquad (*)$$

В последний интеграл введем подстановку

$$\xi = \gamma + v^2(\zeta-\gamma),$$

где v изменяется от 0 до I.

$$d\xi = 2v\,dv(\zeta-\gamma),$$

поэтому

$$\int_\gamma^\zeta \frac{d\xi}{\sqrt{(\zeta-\xi)(\xi-\gamma)}} = \int_0^1 \frac{2\,dv}{\sqrt{1-v^2}} = \pi.$$

Возвращаемся к уравнению (*), которое теперь переписываем, как

$$\int_0^\zeta \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\zeta-\xi}} = \pi \int_0^\zeta f_2(\gamma)\,d\gamma.$$

Дифференцируя обе части последнего выражения по ζ и деля на π, имеем

$$f_2(\zeta) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{d\zeta} \int_0^\zeta \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\zeta-\xi}}.$$

Подставляя теперь $\zeta = c^2$, $\xi = x^2$, $f_1(\xi) = \frac{y(x)}{x}$ и $f_2(\zeta) = \frac{u(c)}{2c}$, получим формулу обращения

$$u(c) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{dc} \int_0^c \frac{y(x)\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}. \qquad (4.23)$$

Вспоминая, что $u(c) = \frac{dh}{dc}$, и интегрируя формулу обращения по c, получим глубину погружения профиля h

$$h(c) = \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{y(x)\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}. \qquad (4.24)$$

В выражении (4.24) предельный переход при $c \to 0$ дает

$$\lim_{c\to 0} h = \lim_{c\to 0} \int_0^c \frac{y(x)\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}} \leqslant \lim_{c\to 0} \left(y_{max} \cdot \arcsin\frac{x}{c}\Big|_0^c \right) =$$

$$\lim_{c\to 0} \left(y_{max} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Полученное выражение для $h(c)$ показывает, что величина $h(c)$ зависит только от формы профиля и не зависит от характера его погружения по времени.

Силу сопротивления, входящего в воду тела, можно вычислить по формуле

$$P=\frac{d}{dt}(m_{пр}\cdot V), \tag{4.25}$$

однако определение $m_{пр.}$ в общем случае представляет сложную задачу.

Рассмотрим погружение клина. При условии малости β можно положить $m_{пр.}=\frac{\rho\pi c^2}{2}$ и, учитывая, что $\frac{dc}{dt}=\frac{V}{u}=\frac{\pi V}{2tg\beta}$, будем иметь

$$P=\frac{\pi\rho c^2}{2}\cdot\frac{dV}{dt}+\frac{\pi^2}{2tg\beta}\cdot\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2c \; . \tag{4.26}$$

Таким образом, выражение для силы сопротивления содержит два слагаемых: первое пропорционально ускорению тела, второе, соответствующее движению без ускорения, пропорционально квадрату скорости погружения и смоченной ширине. При посадке гидросамолета вертикальное ускорение является отрицательным и первый член в выражении силы сопротивления, будучи также отрицательным, несколько уменьшает величину силы сопротивления.

Рассмотрим сопротивление клиновидного тела при постоянной скорости погружения V:

$$P_0=C_x\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2c \; , \tag{4.27}$$

где $C_x=\frac{\pi^2}{2tg\beta}=\frac{\pi}{u}$.

Для каждого конкретного тела сила P_0 возрастает с ростом смоченной поверхности, достигая максимума, когда смоченная ширина сравнивается с полной геометрической шириной клина:

$$\max P_0=P_*=\frac{\pi^2}{2tg\beta}\cdot\frac{\rho V^2}{2}\cdot B. \tag{4.29}$$

Так как для прямолинейного клина $c=\frac{h}{u}$, то

$$P_0=\frac{\pi}{u^2}\rho V^2 h=\frac{\pi^3}{4tg^2\beta}\rho V^2 h \; . \tag{4.30}$$

Следовательно, P_0 возрастает пропорционально погружению h и достигает максимума, когда h достигает величины

$$h_*=c_* u=\frac{B}{\pi}tg\beta \; . \tag{4.31}$$

Опыты и расчеты по более точным теориям показывают, что формула (4.26) справедлива лишь при очень малых значениях $\beta\approx 5^0 \div 10^0$. Для значений $\beta\approx 20^0 \div 30^0$, представляющих интерес для практики, получаются явно завышенные значения силы сопротивления. Как указывалось, Вагнер, пользуясь автомодельностью задачи о погружении прямолинейного клина, выполнил методом последовательных приближений для $\beta = 18^0$ теоретический расчет силы сопротивления. Зная значения P_0 для малых значений β, $\beta = 18^0$ и очевидное $P_0 = 0$

для $\beta=\frac{\pi}{2}$, он построил приближенную формулу

$$P_0=2k(\beta)\rho V^2 h, \tag{4.32}$$

где

$$k(\beta)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2\beta}-1\right)^2. \tag{4.33}$$

Значения $k(\beta)$ для различных значений β даны в табл. 4 и на рис. 64.

Таблица 4

β°	5	10	12	14	15	17	20	22,5	
$k(\beta)$	453,96	100,53	66,37	46,29	39,27	28,96	19,24	14,14	
β°	25	30	35	40	45	50	60	70	80
$k(\beta)$	10,62	6,28	3,88	2,45	1,57	1,01	0,393	0,128	0,0245

В дальнейшем формула (4.33) была подтверждена расчетами и экспериментами в широком диапазоне углов β. Поэтому в настоящее время ею и рекомендуется пользоваться при практических расчетах. Сопоставление значений P_0, полученных различными методами, будет сделано позднее.

Для расчета силы P_0 в общем случае $(V\neq const)$ уточненную формулу для силы сопротивления получим интегрированием давлений по поверхности клина.

Для расчета распределения давлений используем интеграл Лагранжа (1.7), из которого получаем для избыточного давления $\Delta p=p-p_0$ (влиянием весомости пренебрегаем):

$$\frac{\Delta p}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{V_x^2+V_y^2}{2}. \tag{4.34}$$

Пользуясь выражениями потенциала скоростей абсолютного движения жидкости на пластине

$$\varphi(x,0,t)=-V\sqrt{c^2-x^2}$$

и компонент скорости

$$V_x=\frac{Vx}{\sqrt{c^2-x^2}} \; ,$$

$$V_y=-V \; ,$$

получим для $u=const=\frac{2}{\pi}tg\beta$

$$\frac{\Delta p}{\rho}=\frac{dV}{dt}\sqrt{c^2-x^2}+\frac{Vc\frac{dc}{dt}}{\sqrt{c^2-x^2}}-\frac{V^2}{2}\left(\frac{x^2}{c^2-x^2}+1\right),$$

$$\bar p = \frac{\Delta p}{\frac{\rho V^2}{2}} = \frac{2c}{V^2}\frac{dV}{dt}\sqrt{1-\bar x^2} + \frac{2}{u\sqrt{1-\bar x^2}} - \frac{1}{1-\bar x^2}, \qquad (4.35)$$

…е $\bar x = \frac{x}{c}$.

Первый член правой части этого выражения определяет часть …зразмерных давлений, связанных с ускорением клина. Ее распреде…ние по длине $\bar x = \frac{x}{c}$ представляет собой эллипс и имеет макси…м в середине тела. При отрицательном ускорении (посадка гидро…молета) влияние ускорения приводит к снижению давлений.

Вторые два члена

$$\Delta \bar p_2 = \frac{2}{u\sqrt{1-\bar x^2}} - \frac{1}{1-\bar x^2} \qquad (4.36)$$

…еделяют распределение давлений при входе тела в воду с постоян… скоростью. Зависимость $\Delta \bar p_2$ от $\bar x$ для $\beta = 30^\circ$ показана на … 65. Она имеет максимум $\Delta \bar p_{2\,max} = \frac{1}{u^2}$ в точке $\bar x_* = \sqrt{1-u^2} \approx 1 - \frac{u^2}{2}$.

В силу малости величины u при малых значениях β этот мак…м является очень крутым и расположен близко к краю смоченной …рхности. После его достижения давления быстро падают и при $\sqrt{1-\frac{u^2}{4}} \approx 1 - \frac{u^2}{8}$ достигают атмосферного давления. По пред…нию Г.В.Логвиновича эту точку и следует считать фактической …щей смоченной поверхности, так как при более высоких значени… давления $\Delta \bar p_2$ становятся отрицательными и стремятся к … при $\bar x \to 1$, что физически нереально. Такая картина получи… вследствие нарушения принятого в расчете потенциала скорости …ения о возможности отбрасывания квадратов скоростей жидкости … границы смоченной поверхности.

Рассмотрим распределение скоростей по поверхности тела. Ра…ло установлено (формула (4.12)), что при $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$V_x = \frac{V\cdot\bar x}{\sqrt{1-\bar x^2}}, \quad V_y = -V.$$

…дине тела $V_x = 0$. Далее, по мере приближения к границе …ной поверхности скорость V_x быстро возрастает. На фактиче…границе смоченной поверхности $\bar x = \sqrt{1-\frac{u^2}{4}}$

$$V_x = \frac{V\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}}{\frac{u}{2}} \approx \frac{2V}{u} = 2\frac{dc}{dt}, \qquad (4.37)$$

…оризонтальная составляющая скорости жидкости там равняется … расширения смоченной поверхности.

…числим теперь на основании полученного распределения дав… сопротивление погружающегося клина:

$$P = 2\int_0^{c(1-\varepsilon)} \Delta p\, dx. \qquad (4.38)$$

Интегрирование ведётся по фактической смоченной ширине:

$$\bar P = \frac{P}{\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2c} = \int_0^{1-\varepsilon} \Delta \bar p\, d\bar x, \text{ где } \varepsilon \approx \frac{u^2}{8}.$$

С учетом (4.35) получим

$$\bar P = \frac{2c}{V^2}\cdot\frac{dV}{dt}\int_0^1 \sqrt{1-\bar x^2}\, d\bar x + \frac{2}{u}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d\bar x}{\sqrt{1-\bar x^2}} - \int_0^{1-\varepsilon}\frac{d\bar x}{1-\bar x^2}.$$

В первом интеграле в верхнем пределе пренебрегаем добавкой ε, поскольку ее вклад в окончательный результат имеет порядок u^3.

После интегрирования

$$\bar P = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2c}{V^2}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{2}{u}\arcsin(1-\varepsilon) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right|. \qquad (4.39)$$

Преобразуем два последних члена. Обозначим $\arcsin(1-\varepsilon) = \varphi$, тогда $\sin\varphi = 1-\varepsilon$. Введем малую величину η, так чтобы $\varphi = \frac{\pi}{2} - \eta$.

Тогда

$$\cos\eta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = 1-\varepsilon.$$

С другой стороны, $\cos\eta = 1 - \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} - \dots$, поэтому $\varepsilon \approx \frac{\eta^2}{2}$ и $\eta \approx \sqrt{2\varepsilon}$. Теперь выражение для $\bar P$ можно записать в виде

$$\bar P = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{c}{V^2}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{2}{u}\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{\varepsilon}.$$

Вспоминая, что $\varepsilon \approx \frac{u^2}{8}$ и $u = \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\beta$, получим окончательно

$$\bar P = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{c}{V^2}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{\pi}{u}\left[1 - \frac{u}{\pi}\left(1 - \ln\frac{u}{4}\right)\right] \qquad (4.40)$$

или

$$P = \frac{\pi}{2}\rho c^2\frac{dV}{dt} + \pi\rho c V\frac{dc}{dt} - \rho c V^2\left(1 - \ln\frac{u}{4}\right).$$

Последнее выражение можно еще переписать так:

$$P = \frac{d}{dt}(m_{пр}V) - \rho c V^2\left(1 - \ln\frac{u}{4}\right), \qquad (4.41)$$

где $m_{пр} = \frac{\pi\rho c^2}{2}$ – присоединенная масса плоской пластины.

Таким образом, приближенный учет влияния возмущения свободной поверхности добавил к указанному ранее выражению (4.25) поправку $\Delta P = -\rho c V^2\left(1 - \ln\frac{u}{4}\right)$.

3. Задача об основании брызговой струи

При описании явления входа клиновидных тел в воду уже указывалось, что на границе смоченной поверхности образуются брызговые струи (см. рис. 54В). Г.Вагнером [9] был предложен приближенный метод оценки влияния таких струй на погружение с постоянной скоростью слабокилеватого тела.

Рассмотрим обтекание горизонтальной стенки СОА (см. рис. 66) установившимся потоком жидкости, заполняющей нижнюю полуплоскость $z(z=x+iy,\ y\leq 0)$. Жидкость движется справа налево с горизонтальной скоростью U, поток ветвится в точке 0 пластины с отделением струйки вдоль положительного направления оси Ox. Пусть толщина этой струйки при $x\to\infty$ стремится к δ. Жидкость считаем идеальной, несжимаемой и невесомой, течение потенциальным.

Задачу будем решать методом конформного отображения областей течения в плоскостях z, $W=\varphi+i\psi$ и $\omega=\ln U\frac{dz}{dW}=\ln\frac{U}{V}+i\theta$ (V - модуль вектора скорости жидкости, θ - его аргумент) на верхнюю полуплоскость параметрического переменного t. Этот метод, носящий название метода Н.Е.Жуковского*), уже использовался в разделе I гл. I.

Соответствие отображаемых точек свободной границы и обтекаемой плоскости показано на рис. 66, 67, 68 и 69. Соответствующие точки на плоскостях z, W, ω, t обозначены одинаковыми буквами. При построении областей течения приняты во внимание следующие соображения:

1) Плоскость W. Свободная поверхность АВС и стенка АОС являются линиями тока, на которых $\psi=const$, а φ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ на свободной поверхности и от φ_0 (значения потенциала скоростей в точке 0) до $+\infty$ на стенке. Разность между значениями функции тока на стенке ψ_{cm} и на свободной поверхности $\psi_{cв}$ равна $\psi_{cm}-\psi_{cв}=\delta U$.

2) Плоскость ω. На свободной поверхности АВС выполняется равенство $V=U$, следовательно, $Re\,e\omega=0$; аргумент скорости θ меняется от нуля в точке С до $\theta=\pi$ в точке А. Поэтому образом свободной поверхности в плоскости ω (рис. 68) будет отрезок СВА мнимой оси. На твердой границе участок СО соответствует значению $\theta=0$, а ОА - значению $\theta=\pi$, причем $\ln\frac{U}{V}$ меняется от нуля (точки С и А) до бесконечности (точка 0).

3) Плоскость t. Точки на границе располагаются с сохранением последовательности обхода, для 3-х точек координаты можно выбрать произвольно.

Замечая, что в плоскостях $W=\varphi+i\psi$ и $\omega=\ln\frac{U}{V}+i\theta$

---

*) Более подробно существо метода излагается в [63].

область течения ограничена прямыми линиями, мы можем отобразить их на верхнюю полуплоскость с помощью известной формулы Кристоффеля-Шварца.

Отображение W на t определяется уравнением

$$\frac{dW}{dt}=N(t-t_0)^{\alpha_0-1}(t-t_A)^{\alpha_A-1}(t-t_C)^{\alpha_C-1}.$$

Здесь N - некоторая комплексная постоянная, а $\pi\alpha_0, \pi\alpha_A, \pi\alpha_C$ - внутренние углы в точках 0,А,С отображаемой области. Для отображаемой области W (рис. 67)

$$\pi\alpha_0=2\pi$$
$$\pi\alpha_C=0$$
$$\pi\alpha_A=-\pi$$

(из условия, что сумма внутренних углов треугольника равна π).

Точка А в плоскости t отнесена на ∞ для упрощения выражения $\frac{dW}{dt}(t)$, так как при таком выборе t_A член $(t-t_A)^{\alpha_A-1}$ из выражения для $\frac{dW}{dt}$ исчезает.

В результате получаем $\frac{dW}{dt}=N\frac{t-1}{t}$, где N - действительная постоянная. Рассмотрим движение по границе АВСОА в плоскости t (рис. 69). При этом обойдем точку С по полуокружности γ малого радиуса ε, располагающейся в верхней полуплоскости (рис. 69). Приращение W при обходе точки С равняется

$$\Delta W=N\int_\gamma\frac{t-1}{t}\,dt.$$

Для полуокружности γ $t=\varepsilon e^{i\sigma}$, $dt=\varepsilon i e^{i\sigma}d\sigma$, причем σ изменяется от π до 0, поэтому

$$\Delta W=iN\int_\pi^0(\varepsilon e^{i\sigma}-1)\,d\sigma=iN\left(\pi+\frac{2\varepsilon}{i}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta W=i\pi N.$$

С другой стороны, из рис. 67 видно, что при указанном обходе точки в плоскости W эта величина испытывает приращение $\Delta W=i\delta U$, откуда

$$N=\frac{\delta U}{\pi}.$$

Окончательно

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\delta U}{\pi}\cdot\frac{t-1}{t}$$

и после интегрирования по t при граничном условии $W=0$ при $t=1$ имеем

$$W=\frac{\delta U}{\pi}(t-\ln t-1). \qquad (4.42)$$

Перейдем теперь к отображению области ω (рис. 68) на полуплоскость t. Сюда переносятся все соображения, которые были изложены при отображении области W на полуплоскость t. Имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1 (t - t_c)^{\beta_c - 1}(t - t_0)^{\beta_0 - 1},$$

где N_1, β_c и β_0 - параметры отображения, аналогичные параметрам N, α_c и α_0 при отображении области W. Очевидно, $\pi\beta_c = \frac{\pi}{2}$, $\pi\beta_0 = 0$ и поэтому $\frac{d\omega}{dt} = \frac{N_1}{\sqrt{t}(t-1)}$.

При обходе бесконечно удаленной точки 0 в плоскости ω в направлении АОС имеем $\Delta\omega = -i\pi$. С другой стороны, при обходе в том же направлении точки $t = 1$ по полуокружности $\gamma_1 = 1 + \varepsilon e^{i\theta}$ получим

$$\Delta\omega = N_1 \int_{\gamma_1} \frac{dt}{\sqrt{t}(t-1)}$$

и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Delta\omega = N_1 \pi i.$

Отсюда $N_1 = -1$ и

$$d\omega = -\frac{dt}{\sqrt{t}(t-1)} \tag{4.43}$$

$$\omega = -\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}(t-1)}.$$

После подстановки $t = \xi^2$

$$\omega = -\ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1}\Big|_0^{\xi} = -\ln \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\Big|_0^t$$

$$\omega = -\ln \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} + \lim_{t \to 0} \ln \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$$

Легко показать, что в верхней полуплоскости второе слагаемое равно $i\pi$ и, следовательно,

$$\omega = \ln \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1} + i\pi.$$

Памятуя, что $\omega = \ln\left(U \frac{dz}{dW}\right)$ получаем после потенцирования

$$\frac{dz}{dW} = -\frac{1}{U} \cdot \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}.$$

Ранее мы получили $\frac{dW}{dt} = \frac{\delta U}{\pi} \cdot \frac{t-1}{t}$, отсюда

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\delta}{\pi} \cdot \frac{(\sqrt{t}+1)^2}{t} = -\frac{\delta}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t}\right). \tag{4.44}$$

При $z = 0$, $t = 1$ (точка 0), следовательно,

$$z = -\frac{\delta}{\pi}\left(t + 4\sqrt{t} + \ln t - 5\right). \tag{4.45}$$

На свободной поверхности t - вещественно, но отрицательно, $t = |t| e^{i\pi}$ поэтому $\sqrt{t} = i\sqrt{|t|}$ и $\ln t = \ln|t| + i\pi$. Обоз-

начая $|t| = \tau$ (τ принимает значения от 0 до $+\infty$), получим

$$z = -\frac{\delta}{\pi}\left(-\tau + 4i\sqrt{\tau} + \ln\tau + i\pi - 5\right). \tag{4.46}$$

Разделяя действительную и мнимую части выражения (4.46) ($z = x + iy$), получим параметрическое уравнение свободной поверхности

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\delta} &= \frac{1}{\pi}(\tau - \ln\tau + 5) \\ \frac{y}{\delta} &= -\frac{1}{\pi}(4\sqrt{\tau} + \pi) \end{aligned}\right\}. \tag{4.47}$$

На рис. 66 свободная поверхность построена на основании формул (4.47). Функция $y(x)$ в точке В имеет вертикальную касательную, то есть в этой точке $\frac{dy}{dx}(\tau)$ обращается в бесконечность. Легко убедиться, что это условие выполняется при $\tau = \tau_B = 1$. Следовательно, координаты точки В есть

$$\frac{x_B}{\delta} = \frac{6}{\pi} = 1.910$$

$$\frac{y_B}{\delta} = -\frac{4+\pi}{\pi} = -2{,}273. \tag{4.47a}$$

Вычислим давление на пластинку в области брызговой струи.

Согласно уравнению Бернулли, избыточное давление

$$\Delta p = \frac{\rho U^2}{2}\left[1 - \left(\frac{V}{U}\right)^2\right],$$

где V - скорость потока в данной точке. Поскольку

$$e^{\omega} = \frac{U}{V} e^{i\theta}, \quad \frac{V}{U} = |e^{-\omega}|.$$

Но, как было показано, на пластине $(t \geq 0)$ $|e^{-\omega}| = -\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$,

поэтому $\left(\frac{V}{U}\right)^2 = \frac{t - 2\sqrt{t} + 1}{t + 2\sqrt{t} + 1}$. Тогда

$$\Delta\tilde{p} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho U^2}{2}} = 1 - \frac{t - 2\sqrt{t} + 1}{t + 2\sqrt{t} + 1} = \frac{4\sqrt{t}}{t + 2\sqrt{t} + 1}. \tag{4.48}$$

Зависимость $\Delta\tilde{p}(t)$ показана на рис. 70. Пользуясь зависимостью $x = x(t)$ (4.45), строим зависимость давления от координаты x: $\Delta\tilde{p} = f(x)$ (рис. 71). Следует отметить, что давления резко уменьшаются в направлении от точки ветвления потока 0 к вершине брызговой струи, быстро выравниваясь до атмосферного.

Обозначим через $P(x)$ силу, действующую на пластину на участке от сечения x до $+\infty$:

$$\frac{P(x)}{\frac{\rho U^2}{2}} = \int_x^{\infty} \Delta\tilde{p}\, dx = -\int_0^t \Delta\tilde{p} \frac{dx}{dt} dt.$$

Поскольку $\Delta\tilde{p} = \frac{4\sqrt{t}}{t + 2\sqrt{t} + 1}$ и $\frac{dx}{dt} = -\frac{\delta}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t}\right) = -\frac{\delta}{\pi}\frac{(\sqrt{t}+1)^2}{t}$,

то

$$\frac{P}{\frac{\rho U^2}{2}} = \frac{8\delta}{\pi}\sqrt{t} \tag{4.49}$$

Величина $\frac{P}{\frac{\rho U^2}{2}\delta}$ в зависимости от $\frac{x}{\delta}$ показана на рис. 71.

На участке пластины вблизи точки ветвления потока ($x = 0$,

$t = 1$)

$$\frac{p}{\frac{\rho U^2}{2}} = \frac{8\delta}{\pi}.$$

Для точек смоченной поверхности, расположенных далеко от точки ветвления, $(t \gg 1, x<0)$ $-x \approx \frac{\delta}{\pi} t$

$$\frac{p}{\frac{\rho U^2}{2}} \approx \frac{2\delta}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\delta}(-x)} = 8\sqrt{\frac{\delta}{\pi}(-x)}. \qquad (4.50)$$

Рассмотрим теперь задачу об основании брызговой струи. Для этого возьмем рассмотренное течение при стационарном обтекании пластинки с ответвлением струи и наложим на него поступательное движение в направлении оси Ox с постоянной скоростью $U = \frac{dc}{dt}$. Получится течение, схожее с течением при расширяющейся смоченной поверхности. На свободной поверхности далеко впереди ($x \to \infty$, точка А рис. 66) скорость течения стремится к нулю.

В точке В, где происходит поворот струи (касательная к свободной поверхности вертикальна), свободная поверхность будет перемещаться в положительную сторону оси Ox со скоростью $U = \frac{dc}{dt}$.

Наконец, в самой брызговой струе при $x \to \infty$ жидкость перемещается со скоростью $2\frac{dc}{dt}$.

В силу того, что на исходное течение наложен поток с постоянной скоростью, распределение давлений на пластине в системе координат, связанной с критической точкой, не изменится.

В полученное решение входит неизвестная пока величина δ – толщина брызговой струи. Ее необходимо связать с величиной смоченной ширины C. Эту связь можно получить путем сравнения асимптотических выражений комплексных потенциалов для обтекания пластинки со струей и для погружающейся в воду расширяющейся пластинки $2C$.

Напишем сначала комплексный потенциал суммарного обтекания пластинки со струей и горизонтального течения со скоростью U в системе осей координат, связанных с пластиной:

$$W = w + Uz.$$

Воспользуемся выражениями $W(t)$ (4.42) и $z(t)$ (4.45). Введем значения $t = \tau e^{i\pi}$ $(\tau > 1)$, соответствующие части АВ свободной поверхности жидкости. Заменим в формулах (4.42) и (4.45) t на τ с учетом равенств

$$\left.\begin{aligned} \ln t &= \ln\tau + \pi i \\ \sqrt{t} &= i\sqrt{\tau} \\ t &= -\tau \end{aligned}\right\}, \text{ тогда}$$

$$z = \frac{\delta}{\pi}(\tau - 4i\sqrt{\tau} - \ln\tau - \pi i + 5)$$

$$W = U\frac{\delta}{\pi}(-4i\sqrt{\tau} - 2\ln\tau - 2\pi i + 4).$$

При больших положительных значениях τ $z \approx \frac{\delta}{\pi}\tau$

$$W = -4U\frac{\delta}{\pi} i\sqrt{\tau} = -4U\frac{\delta}{\pi} i\sqrt{\frac{\pi z}{\delta}} = -4Ui\sqrt{\frac{\delta z}{\pi}}. \qquad (4.51)$$

Теперь возьмем выражение потенциала скоростей при обтекании погружающейся пластинки шириной $2C$ (4.9). Для относительного движения

$$W = -iV\sqrt{z^2 - c^2}.$$

Перенесем начало координат на край пластины $x = +c$, тогда

$$W = -iV\sqrt{z^2 + 2zc}.$$

При достаточно больших z и, вместе с тем, $|z| \ll c$, имеем

$$W \approx -iV\sqrt{2zc}. \qquad (4.52)$$

Приравнивая асимптотические выражения для W (4.51) и (4.52), получаем

$$\delta = \frac{c\pi}{8}\left(\frac{V}{U}\right)^2.$$

Поскольку $\frac{V}{U} = \frac{V}{\frac{dc}{dt}} = u$, то

$$\delta = \frac{\pi c u^2}{8}. \qquad (4.53)$$

Избыточное давление на пластине есть (с учетом (4.48)):

$$\Delta\bar{p} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho V^2}{2}} = \frac{\Delta\bar{p}}{u^2},$$

$$\Delta\bar{p} = \frac{4\sqrt{t}}{u^2(\sqrt{t}+1)^2}.$$

При этом на пластине АОС (рис. 69)

$$x = -\frac{cu^2}{8}(t + 4\sqrt{t} + \ln t - 5),$$

где $t \geq 0$.

На основании полученных результатов можно более точно оценить силу сопротивления клина. Вычислим силу давления воды ΔP_2 на участки клина, расположенные с внешней стороны от максимумов давления $|x| \geq (1 - \frac{u^2}{2})c$:

$$\frac{\Delta P_2}{\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2c} = 2\int_{c(1-\frac{u^2}{2})}^{\infty} \frac{\Delta p}{\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2c}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 1.$$

Для участка клина между максимумами давлений применим формулу (4.36):

$$\Delta\bar{p} = \frac{2}{u\sqrt{1-\bar{x}^2}} - \frac{1}{1-\bar{x}^2}.$$

Тогда сила давления ΔP_1 есть

$$\frac{\Delta P_1}{\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2c} = \int_0^{1-\frac{u^2}{2}} \Delta_1\bar{p}\,d\bar{x} \approx \frac{2}{u}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \ln\frac{u}{2}.$$

Складывая ΔP_1 и ΔP_2, получим полное сопротивление клина

$$C_x = \frac{P}{\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2c} = \frac{\Delta P_1 + \Delta P_2}{\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2c} = \frac{\pi}{u} - 1 + \ln\frac{u}{2}. \qquad (4.54)$$

Ранее было показано (см. (4.28)), что при вычислении по простейшей теории "расширяющейся пластины", когда

$$P = V\frac{dm_{пр}}{dt}$$

, получалось

$$C_x = \frac{\pi}{u}.$$

Таким образом, уточнение, вносимое предлагаемым методом учета картины течения у краев смоченной поверхности, дает поправку

$$\Delta C_x = -1 + \ln\frac{u}{2}. \qquad (4.55)$$

Возвращаясь к формулам (4.47а), можем определить расстояние от критической точки на поверхности клина $(\max \Delta p)$ до вертикальной касательной к свободной поверхности (точка "В"):

$$\Delta x_B = \frac{6}{\pi}\delta = \frac{3}{4}u^2 c$$

или

$$\frac{\Delta x_B}{c} = \frac{3}{4}u^2. \qquad (4.56)$$

Поскольку точка $\max \Delta \bar{p}$ лежит левее абсциссы $\frac{x}{c} = 1$ на $\frac{u^2}{2}$, то, следовательно, точка "В" лежит правее этой точки (рис. 72) на

$$\frac{\Delta x}{c} = \frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{2}u^2 = \frac{u^2}{4}.$$

Мы получили ранее (раздел 2), что для клина $u = \frac{2\,tg\,\beta}{\pi}$. Подставляя эту величину в (4.54), мы можем вычислить величины C_x для погружающегося клина, которые оказываются близкими к вычисленным с помощью аппроксимационной формулы Вагнера (4.32), где принято $h = \frac{x\,tg\,\beta}{\pi}$ (см. табл. 5, рис. 73). Как и следовало ожидать, лучшая сходимость имеет место при малых значениях β.

Таблица 5

β_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Формула (4.54)	276,52	135,8	89,07	51,82	35,95	24,11	14,96	10,40	7,68	5,85
Формула (4.32)	276,52	135,21	88,15	50,57	34,53	22,57	13,40	8,92	6,30	4,62

4. Начальная стадия погружения килеватых тел со смоченной скулой

При рассмотрении процессов погружения тел в жидкость обычно всю жидкость условно разделяют на две области: основной поток, ог-

раниченный искривленной свободной поверхностью вплоть до оснований брызговых струй (т.е. условных плоскостей, проведенных нормально к свободной поверхности в точках ее максимальной кривизны) и брызговые струи.

В предыдущих разделах были довольно подробно изложены методы математического описания той стадии погружения в жидкость килеватого тела, когда брызговые струи еще не сошли со щек тела (рис. 54Б). Как мы убедились, в брызговых струях давление быстро уменьшается до атмосферного, и их вклад в полное сопротивление погружающегося тела невелик.

После того, как вершины брызговых струй достигают скул тела и выходят в атмосферу, частицы жидкости в них, по существу, отрываются от основного потока и в своем движении зависят от гравитационных, аэродинамических сил, поверхностного натяжения, но практически не взаимодействуют с основным потоком.

Траектории частиц жидкости в брызговых струях близки к параболическим и могут быть вычислены с удовлетворительной степенью точности из рассмотрения движения частиц в поле тяжести Земли с учетом аэродинамического сопротивления.

Изучение брызговых струй представляет определенный самостоятельный интерес, особенно с точки зрения защиты от брызг двигателей, закрылков и других частей морских летательных аппаратов. Попадание брызг в двигатели вызывает их ускоренный износ. Попадание же интенсивных брызговых струй на закрылки может вызвать механическое повреждение.

В области основного потока выход вершин брызговых струй в атмосферу не вызывает существенных изменений. В частности, сопротивление тела продолжает расти с увеличением глубины погружения, а распределение давлений на участках от киля до основания брызговых струй такое же, как и до выхода струй в атмосферу.

Существенное изменение картины распределения давлений происходит после того, как основания брызговых струй достигнут скул тела. Собственно, с этого момента и начинается стадия погружения, которую принято называть погружением со смоченными скулами (рис. 54В,Г,Д).

Для начального периода погружения со смоченной скулой можно воспользоваться примененным ранее упрощающим предположением о снесении граничных условий на горизонтальную ось координат. Оговоримся сразу, что это предположение является достаточно грубым и оправдывается только для небольших глубин погружения скул тела. Вместе с тем качественные результаты анализа, сделанного в рамках принятого допущения, вполне приемлемы для понимания существа процесса погружения со смоченными скулами.

Как отмечалось в разделе 2, приоритет открытия функционального характера силы сопротивления при погружении тела со сходом струй с его кромок принадлежит Г.В.Логвиновичу. Им же впервые была сделана оценка так называемой переходной функции

$$H\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{P\left(\frac{h}{b}\right)}{W\left(\frac{h}{b} \to \infty\right)} \tag{4.59}$$

(здесь $2b = B$ — ширина погружающегося клина), которая указывает соотношение между величиной сопротивления погружающегося тела и его сопротивлением при обтекании с развитой кавитацией бесконечным потоком (или сопротивлением Бобылева, которое называется так по имени русского ученого Д.К.Бобылева, впервые получившего решение задачи о симметричном обтекании клиновидного тела бесконечным потоком с отрывом струй в 80-х годах прошлого века). Оценка, сделанная Г.В.Логвиновичем, строилась на предположении, что потенциал скоростей на поверхности клина и на ближайшей окрестности внутренней стороны свободной поверхности (т.е. той части свободной поверхности, которая располагается между скулой клина и основанием брызговой струи и состоит из частиц жидкости, сошедших со скулы клина) выражается так же, как и на плоской пластине шириной $2c$, причем c, как и прежде, означает расстояние вдоль невозмущенной свободной поверхности жидкости от основания брызговой струи до оси симметрии клина. Таким образом,

$$\varphi = -Vc\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^2}. \tag{4.60}$$

Для избыточного давления на поверхности клина имеем, используя интеграл Лагранжа в системе координат, связанной с клином,

$$\frac{\Delta p}{\rho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot V - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]. \tag{4.61}$$

Поскольку нормальная скорость на поверхности клина есть $V\cos\beta = -V_y\cos\beta + V_x\sin\beta$, то

$$\frac{\Delta p}{\rho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}V_x^2(1+tg^2\beta). \tag{4.62}$$

Членом $tg^2\beta$ для малых значений β можно пренебречь. Поскольку

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{Vc\frac{dc}{dh}}{\sqrt{c^2-x^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{Vx}{\sqrt{c^2-x^2}},$$

то для точки $x = b$, где $\Delta p = 0$

$$\frac{V^2\frac{dc}{dh}\cdot c}{\sqrt{c^2-b^2}} + \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{V^2b^2}{c^2-b^2} = 0, \tag{4.63}$$

$$2c\frac{dc}{dh} + \sqrt{c^2-b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{c^2-b^2}} = 0. \tag{4.63a}$$

Вводя вместо глубины погружения острия клина h глубину погружения скулы h_1 равную 0 при $c = b$, проинтегрируем (4.63а), вводя подстановку $\tau = \sqrt{c^2-b^2}$:

$$dh_1 = \frac{2\tau^2\,d\tau}{b^2-\tau^2}$$

$$h_1 = 2b\ln\frac{b^2+\sqrt{c^2+b^2}}{\sqrt{2b^2-c^2}} - 2\sqrt{c^2-b^2}.$$

В безразмерном виде

$$\frac{h_1}{2b} = \ln\frac{1+\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{2-\lambda^2}} - \sqrt{\lambda^2-1}, \tag{4.64}$$

где $\lambda = \frac{c}{b}$.

Функция (4.64) построена на графике рис. 74. При $\lambda \to \sqrt{2}$, $\bar{h}_1 \to \infty$, что соответствует обтеканию клина бесконечным потоком. Безразмерные давления на поверхности клина выражаются формулой

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho V^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{\lambda^2-\bar{x}^2}} - \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\lambda^2-\bar{x}^2}} + 1 - \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2-\bar{x}^2}, \tag{4.65}$$

в которой $\bar{x} = \frac{x}{b}$. Распределения давлений по ширине с одной стороны плоскости симметрии клина для различных величин параметра λ приведены на рис. 75.

Выражения (4.64) и (4.65) совместно устанавливают параметрическую связь между глубиной погружения клина и распределением давлений на его гранях.

Сила сопротивления клина получается путем интегрирования (4.65) по ширине клина:

$$\bar{P} = \frac{P}{\frac{\rho V^2}{2}\cdot 2b} = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{\lambda^2-\bar{x}^2}} - \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\lambda^2-\bar{x}^2}} + 1 - \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2-\bar{x}^2}\right]d\bar{x},$$

$$\bar{P} = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} - \sqrt{\lambda^2-1}\right)\arcsin\frac{1}{\lambda} + 2 - \frac{\lambda}{2}\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}. \tag{4.66}$$

Параметрическая связь между сопротивлением клина и его погружением задается выражениями (4.64) и (4.66). График функции (4.66) построен на рис. 76, а зависимости $\bar{P}(\bar{h}_1)$ — на рис. 77.

Таким образом, совокупность рассмотренных в главе 4 задач о погружении плоских контуров в жидкость обеспечивает возможность оценки гидродинамических характеристик глиссеров методом плоских поперечных сечений как для режимов глиссирования на неполной, так и на полной конструктивной ширине.

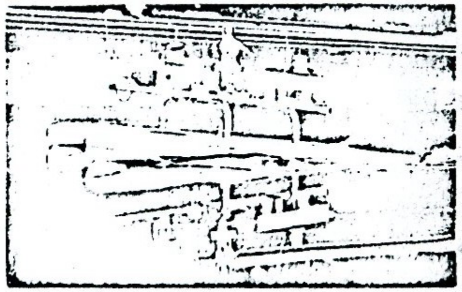


Рис 1. Испытания модели поплавков гидросамолетов в гидроканале. Малая скорость движения $Fr_l = 0.85$, $\alpha = 5°$

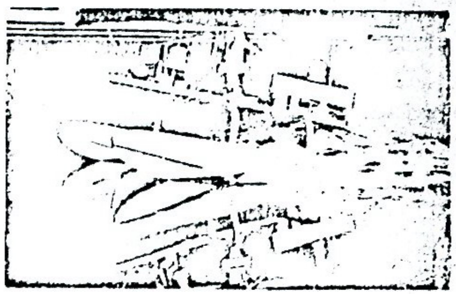


Рис 2. Выход на редан $Fr_l = 1.0$, $\alpha = 11°35'$.

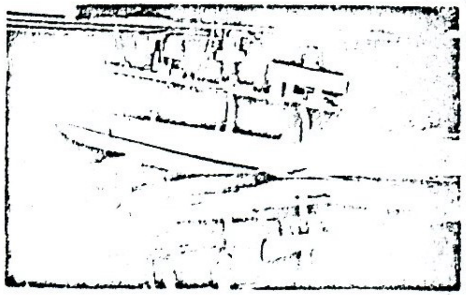


Рис 3. Глиссирование $Fr_l = 5.0$, $\alpha = 3°50'$.

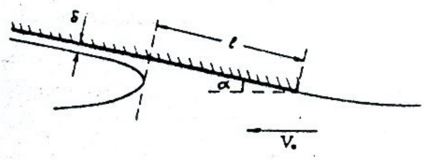


Рис.4 Схема глиссирования Вагнера

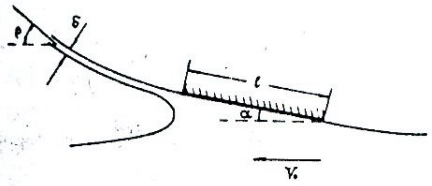


Рис. 5 Схема глиссирования С.А. Чаплыгина.

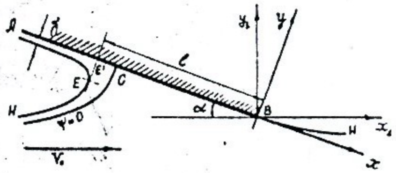


Рис. 6. Плоскость потока Z.

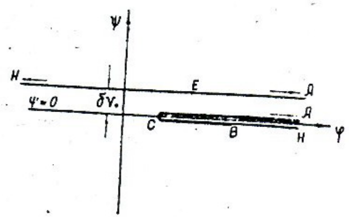


Рис. 7. Плоскость W.

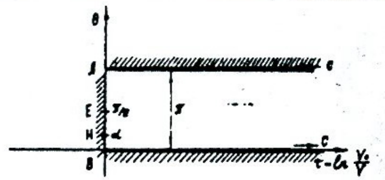


Рис 8. Плоскость ω.

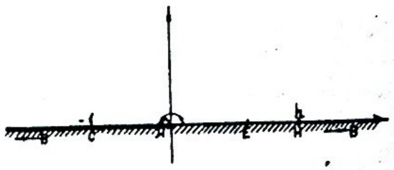


Рис. 9. Плоскость t.

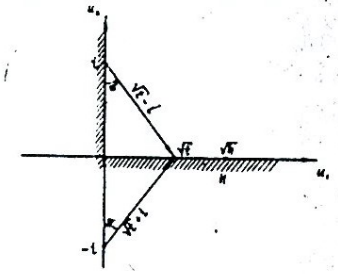


Рис 10 Плоскость U.

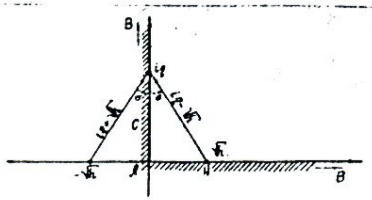


Рис 11 Плоскость U.

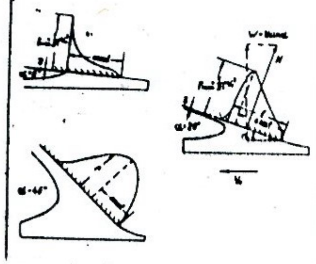


Рис. 12. Распределение давления на глиссирующей пластине при разных углах атаки.

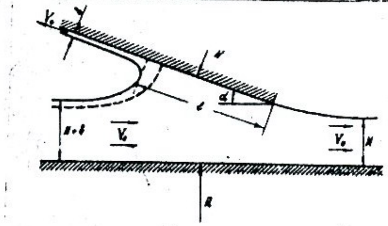


Рис. 13.

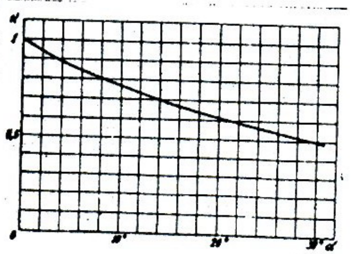


Рис. 14.

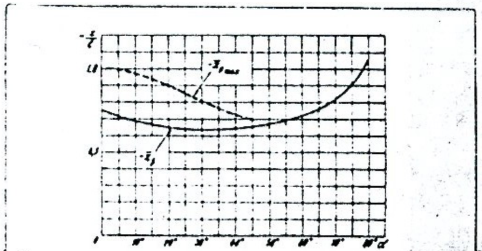


Рис. 15. Зависимость положения координат точек p_{max} и центра давления от угла атаки глиссирующей плоской пластины.

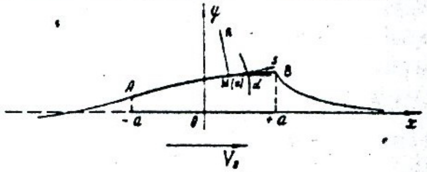


Рис. 16.

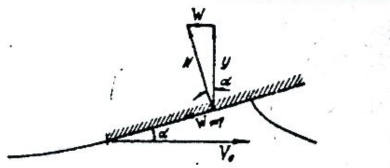


Рис. 17. Схема сил, действующих на глиссирующую пластину.

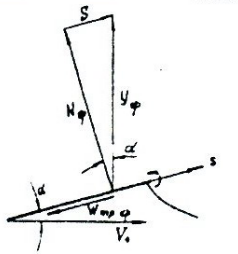


Рис. 18. Схема сил, действующих на крыло.

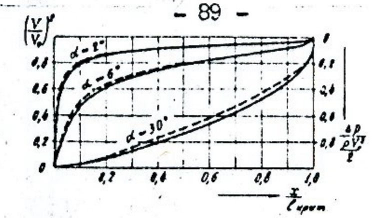


Рис. 19. Сравнение распределений давлений по глиссирующей пластине [illegible] и нижней поверхности крыла-пластинки ([illegible]) на участках до критической точки.

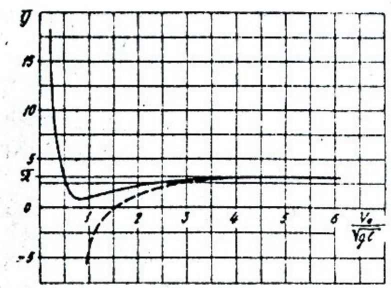


Рис. 20.

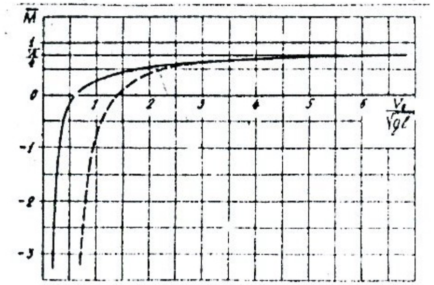


Рис. 21.

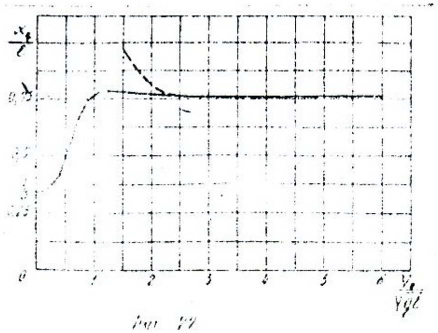


Рис. 22.

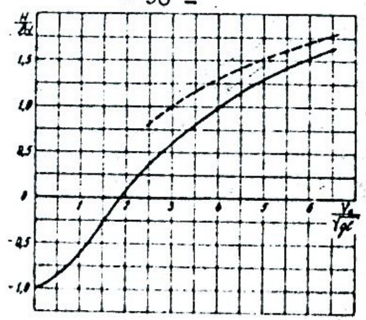


Рис 23

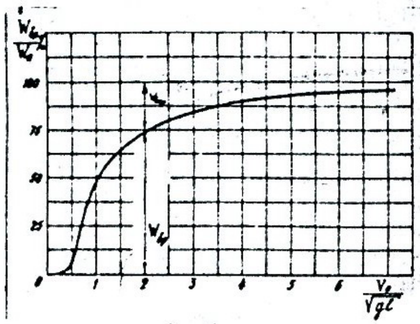


Рис. 24

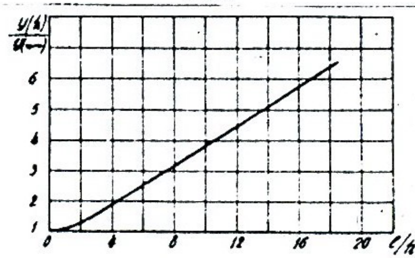


Рис 25 Влияние глубины водоема на подъемную силу (линеаризированная теория).

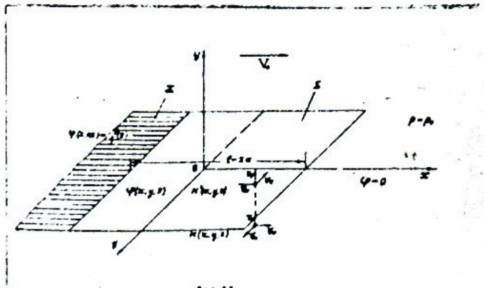


Рис 26

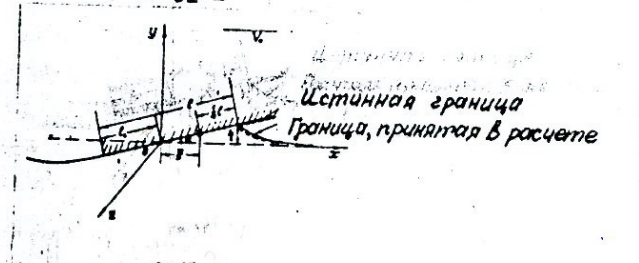


Рис 27

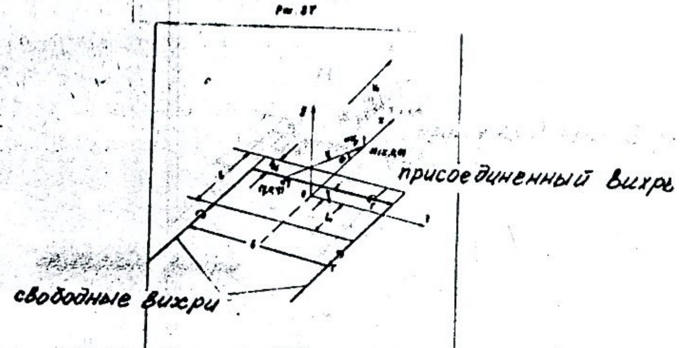


Рис 28

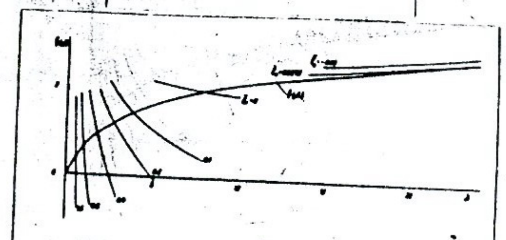


Рис 29

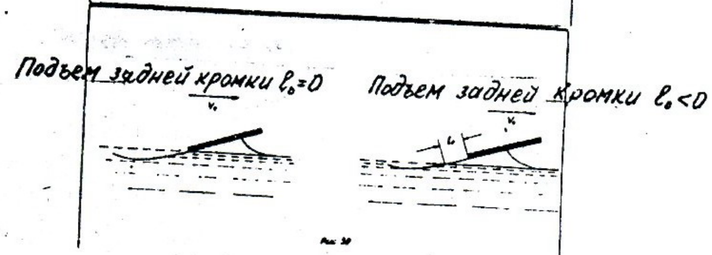


Рис 30

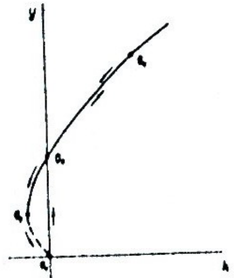


Рис 31

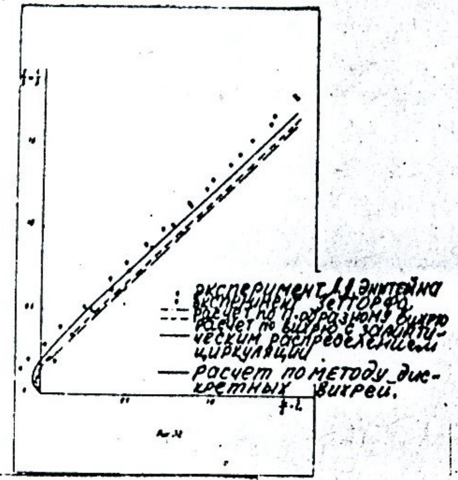


Рис 32

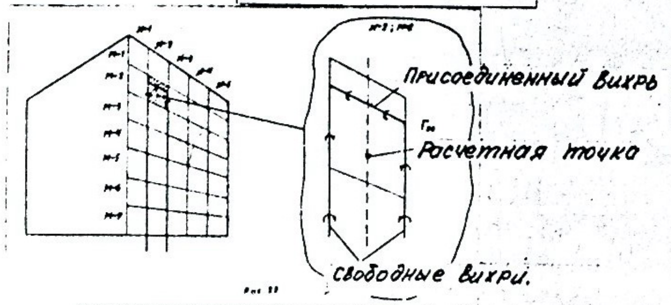


Рис 33

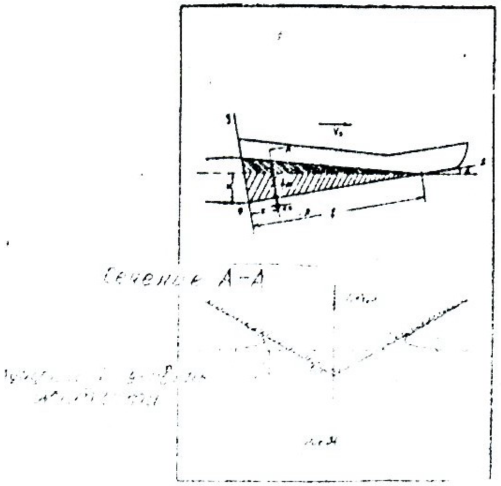


Рис 34

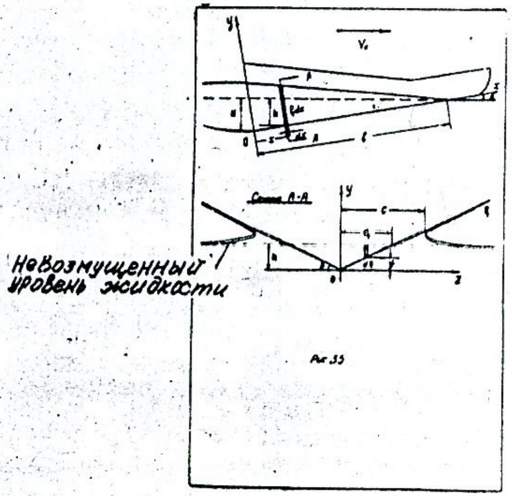


Рис 35

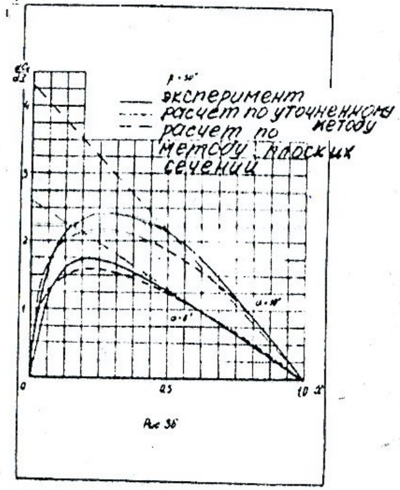


Рис 36

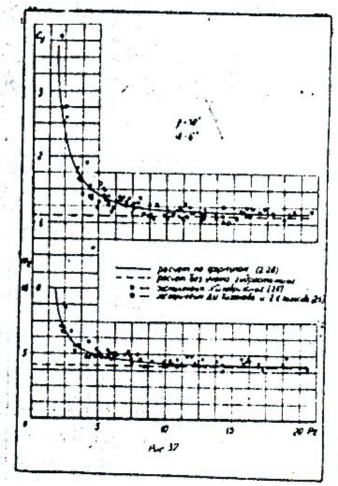


Рис 37

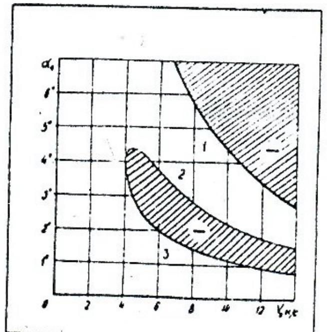


Рис. 38. Зоны устойчивых и неустойчивых режимов глиссирующего судна при постоянном весе.

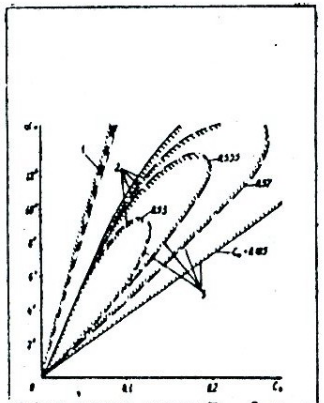


Рис. 39. Типичные зоны устойчивости плоской глиссирующей пластины в координатах α_0 и C_B. Неустойчивые области заштрихованы.

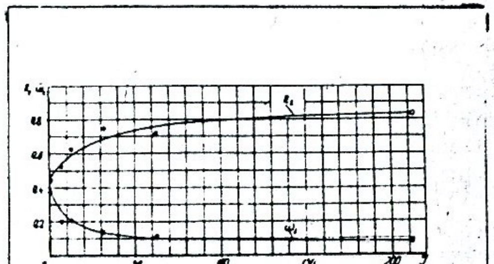


Рис. 40. Зависимость коэффициента R_2 и безразмерной частоты колебаний $\bar{\omega}_2$ от безразмерного момента инерции $\bar{J}_0$.

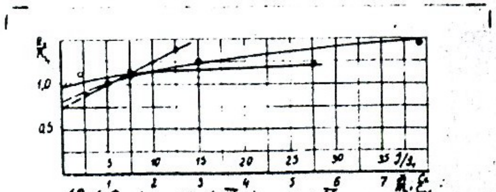


Рис. 41. Функции $\varphi_1\left(\frac{C_0}{C_{01}}\right)$; $\varphi_2\left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}_1}\right)$; $\varphi_3\left(\frac{\bar{J}}{\bar{J}_1}\right)$; для расчета третьей границы устойчивости • - $\varphi_1\left(\frac{C_0}{C_{01}}\right)$; ◐ - $\varphi_2\left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}_1}\right)$; о - $\varphi_3\left(\frac{\bar{J}}{\bar{J}_1}\right)$.

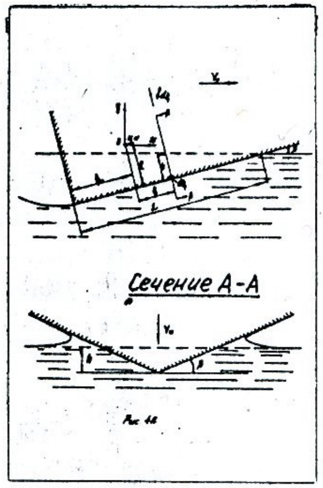


Рис 42

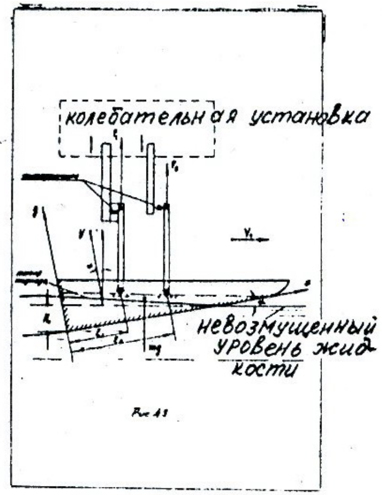


Рис 43

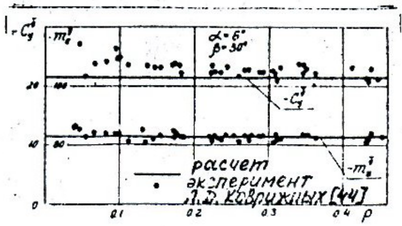


Рис 44

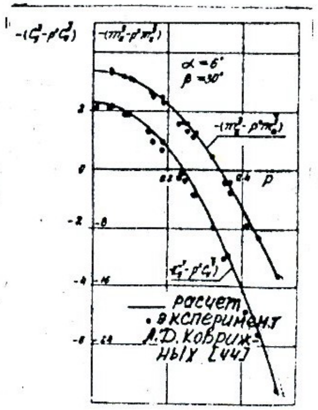


Рис 45

$\beta = 30°$; $m = 36.1$; $J = 30.5$ кгм²
$Y = 321$ н $\xi_0 = 0.2$ м $\eta_0 = 0.16$ м

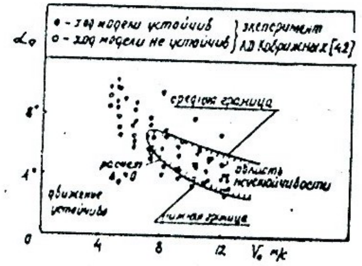


Рис.46

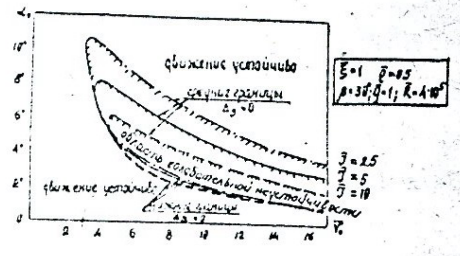


Рис. 47

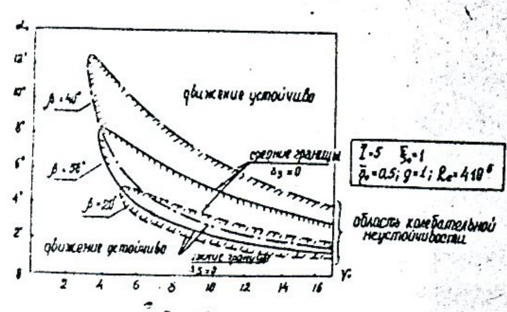


Рис 48

$\bar{J} = 5$; $\bar{\zeta}_0 = 1$; $\beta = 30°$
$\bar{\eta}_0 = 1$; $\bar{R}_e = 4 \cdot 10^5$

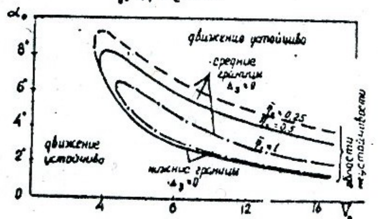


Рис. 49

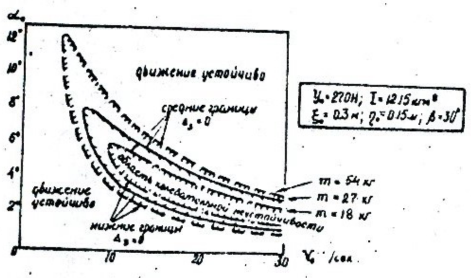


Рис 50

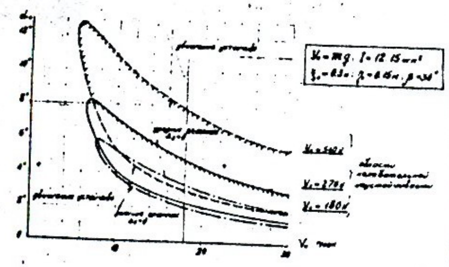


Рис 51

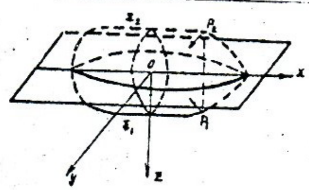


Рис 52

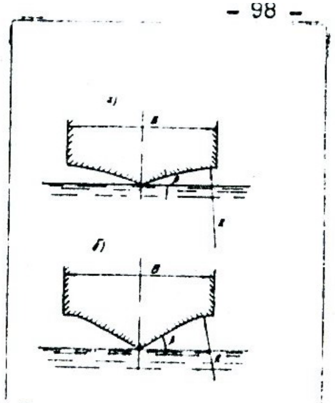


Рис. 53. Поперечное сечение днища
а) глиссера б) гидросамолета

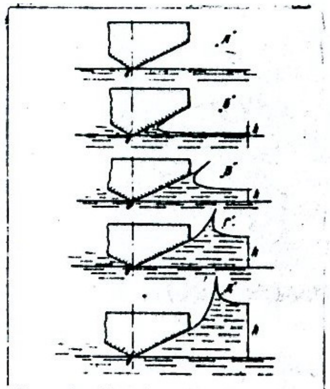
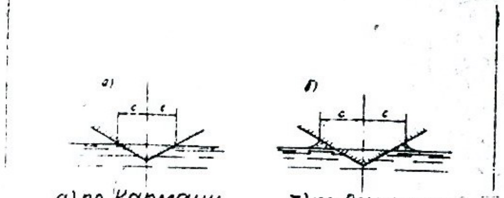


Рис. 54. Развитие всплеска при погружении клина в жидкость.



а) по Карману б) по Вагнеру
Рис. 55. Определение смоченной ширины колебательного тела.

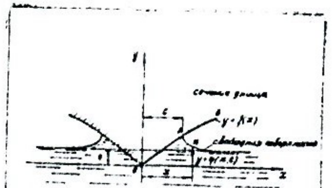


Рис. 56. К выводу интегрального уравнения Вагнера.

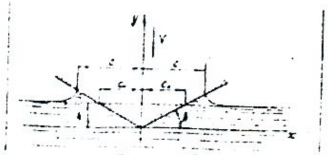


Рис. 57. Погружение клина с постоянной скоростью.

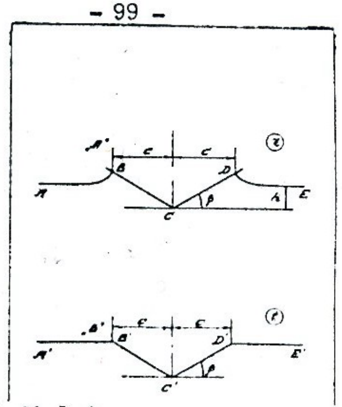


Рис. 58. Задача о погружении клина в постановке Фердинанда.

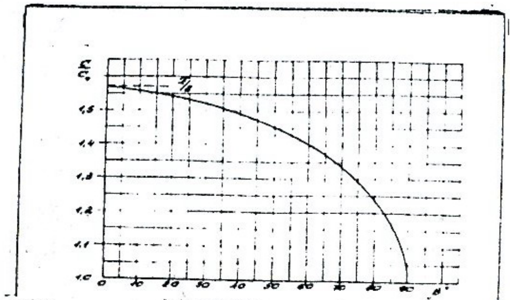


Рис. 59. Зависимость c/c_0, полученная Фердинандом.

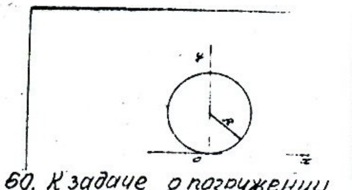


Рис. 60. К задаче о погружении цилиндра.

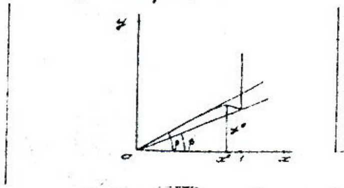


Рис. 61. Задание килеватого профиля полиномом.

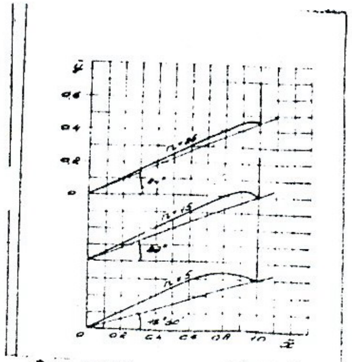
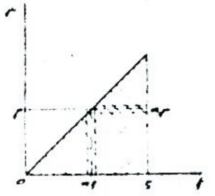


Рис. 62. Примеры профилей днища, задаваемых полиномом
$y = a_1 x - a_n x^n$ ($tg\beta = 0,5$).



...ис. 63. К выводу формулы обращения интегрального уравнения Вагнера.

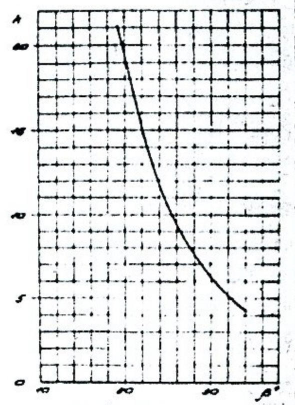
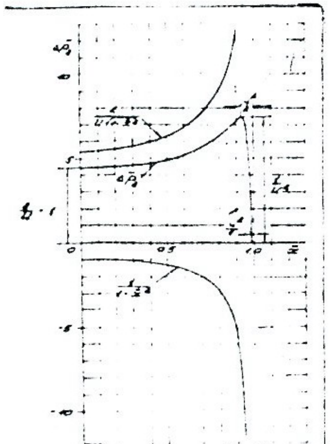


Рис. 64. Зависимость $K=K(\beta)$



...6. Распределение давле-... при равномерном погру-...й в жидкость клина.

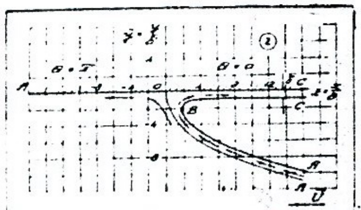


Рис. 66. Обтекание горизонтальной стенки установившимся потоком жидкости.

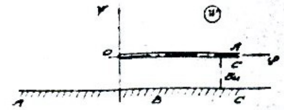


Рис. 67. Плоскость комплексного потенциала при обтекании стенки установившимся потоком жидкости.

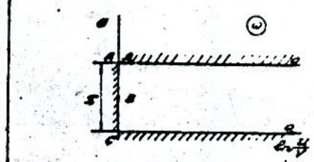


Рис. 68. Плоскость комплексного переменного ω.

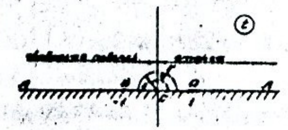


Рис. 69. Плоскость вспомогательного переменного t.

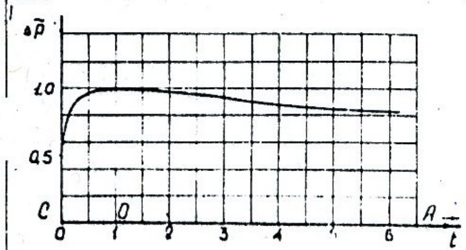


Рис 70 Зависимость давления на стенке от вспомогательного переменного t.

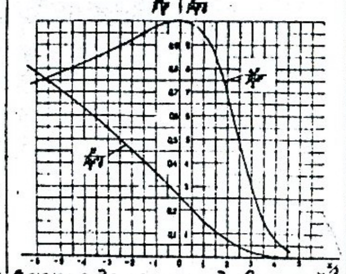


Рис. 71. Распределение давлений и ...ила сопротивления при обтекании стенки потоком.

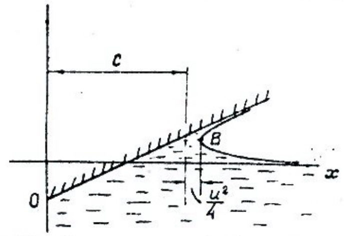


Рис 72 Вклад толщины основания брызговой струи в величину смоченной ширины погружающегося клина

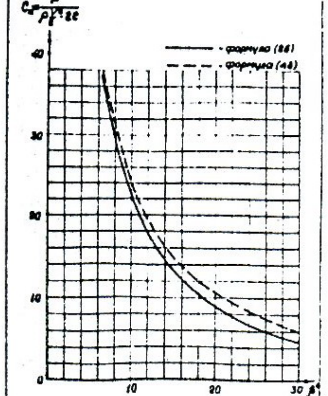
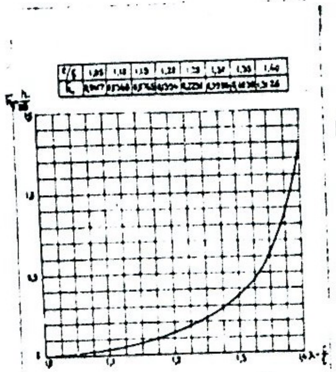


Рис. 73. Коэффициенты сопротивления клиньев, вычисленные с помощью аппроксимационной формулы Вагнера [26] и по распределению давлений [48].



: 74. Зависимость глубины
гружения скулы профиля
т параметра λ.

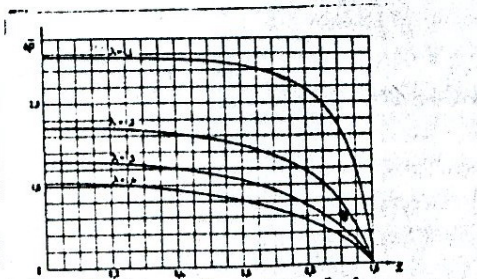
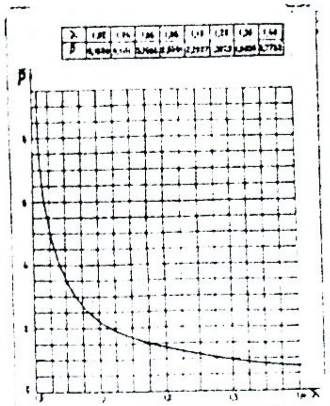


Рис. 75. Распределение давлений по поверхности погружающейся пластины для различных значений параметра λ.



· 76. Зависимость силы сопротив-
ния погружающейся плас-
ины от параметра λ.

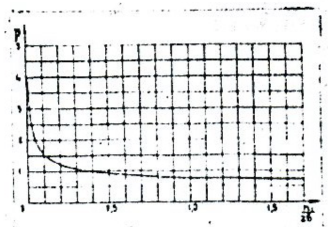


Рис. 77. Зависимость силы сопротивления пластины от глубины погружения.

Список литературы

1. Müller G.H. Some notes of the design of foabs hydroairoplanes. Tras. of the Ynst. of naval architects 1964г.
2. Sottorf W. Versuche mit Gleitflächen. Werft-Reederei-Hafen, № 21, 1929.
3. Косоуров К.Ф., Володин Н.С., Харитонов К.Н. Исследования явлений глиссирования.- Л., 1934.
4. Косоуров К.Ф. О глиссировании килеватых пластин.- Труды I-й Всесоюзной конференции по гидродинамике.- М.: изд. ЦАГИ, 1935.
5. Справочник авиаконструктора. Т. II. Гидромеханика гидросамолета.- М.: изд. ЦАГИ, 1938.
6. Эпштейн Л.А. Новые экспериментальные материалы по глиссированию плоских пластинок.- Труды ЦАГИ, вып. 508, 1940.
7. Эпштейн Л.А. Устойчивость глиссирования гидросамолетов и глиссеров.- Труды ЦАГИ, вып. 500, 1941.
8. Вагнер Г. Посадка гидросамолетов. Сборник статей по аэрогидродинамике под ред. В.Л.Александрова, М.-Л., ГОСМАШМЕТИЗДАТ, 1933.
9. Wagner H. Über stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten, ZAMM, Bd 12, № 4, 1932.
10. Гуревич М.И., Янпольский А.Р. О движении глиссирующей пластины.- Техника воздушного флота, № 10, 1933.
11. Келдыш М.В. Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости.- Техн. заметки ЦАГИ, вып. 52, 1935.
12. Седов Л.И. Плоская задача о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости.- Труды конференции по волновому сопротивлению.- М.: изд. ЦАГИ, 1937.
13. Кочин Н.Е. Плоская задача о глиссировании слабо изогнутого контура по поверхности тяжелой несжимаемой жидкости.- Труды ЦАГИ, вып. 356, 1938.
14. Чаплыгин Ю.С. Глиссирование плоской пластины бесконечного размаха по поверхности тяжелой жидкости.- Труды ЦАГИ, вып. 508, 1940.
15. Николаев М.Н. К решению плоской задачи о глиссировании по взволнованной поверхности тяжелой жидкости.- ПММ, т. 41, 1977.

Rispin P.P. A singular perturbation method for nonlinear waves past an obstacle. Ph.D. Thesis. Calif. Inst. of Technology, Pasadena, Calif., 1967.

Wu. Y.T. A singular perturbation theory for nonlinear free surface flow problems.- Int. Shipbuilding Progress, 14, 1967.

Рождественский К.В. Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла.

Чаплыгин Ю.С. Глиссирование по жидкости конечной глубины.- ПММ, т. У, вып. 2, I94I.

Green A.E. The moment of the fluid forces acting on a plate which is gliding on the surface of a stream. (PCPS). 1938, vol. 34, part 2.

Седов Л.И. Теория нестационарного глиссирования и движения крыла со сбегающими вихрями.- Труды ЦАГИ, вып. 252, I936.

Щеглова М.Г. Расчет смоченной длины пластинки конечного размаха при глиссировании с постоянной скоростью: Сборник работ по гидродинамике.- БНИ ЦАГИ, I959.

Павленко Г.Е. Основы теории глиссирования.- Труды НИИ ГВФ, I932.

Логвинович Г.В. Погружение тел в жидкость, удар и глиссирование.- Труды ЦАГИ, вып. 707, I958.

Тихонов А.И., Колосов Г.К. Гидродинамические характеристики плоскокилеватых пластин при установившемся глиссировании и при косом входе в воду с постоянной скоростью и постоянным углом приводнения: Сборник работ по гидродинамике.- М.: изд. ЦАГИ, I959.

Коврижных Л.Д. Исследование гидродинамических характеристик плоскокилеватых пластин, глиссирующих на режимах без смачивания скул.- Труды ЦАГИ, вып. I86I, I977.

Коврижных Л.Д. Продольное распределение гидродинамической нагрузки на глиссирующей плоскокилеватой пластине.- Ученые записки ЦАГИ, т. УШ; № 4, I972.

Сокольянский В.П., Малярова Н.Д. Влияние числа Фруда на стационарные характеристики глиссирования плоскокилеватой пластины с углом поперечной килеватости 20°.- Труды ЦАГИ, вып. I86I, 1977.

Алинин Н. О моменте давления, действующего на глиссирующую пластинку.- Ученые записки Саратовского Государственного университета, т. I (XIУ), серия ФМН, вып. I, I938.

30. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.- М.: Наука, I966.

3I. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, т. I.- М.: ФИЗМАТГИЗ, I963.

32. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.- М.: Наука, I965.

33. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами.- Киев: Наукова думка, I969.

34. Седов Л.И. О масштабном эффекте и наивыгоднейших соотношениях при глиссировании.- Труды ЦАГИ, вып. 439, I939.

35. Ferdinande V. Theoretical considerations on the penetration of a wedge into the water. Internal. Shipbuild. Progr., 1966, v13, № 140.

36. Jones R.T. Correction of the lifting-line theory for the effect of the chord. NACA. TN. 817, 1941.

37. Штейнберг Р.И. Приближенный метод расчета положения аэродинамического фокуса крыльев малого удлинения.- Труды ЦАГИ, вып. 938, I964.

38. Седов Л.И. Влияние механических параметров на влияние глиссирования килеватой пластинки.- Изв. АН СССР, ОТН, № I-2, I943.

39. Эпштейн Л.А. Методы теории размерностей и подобия.- Л.: Судостроение, I970.

40. Эпштейн Л.А. Влияние формы поперечного профиля днища лодок гидросамолетов на устойчивость.- Труды ЦАГИ, вып. 583, I946.

4I. Тихонов А.И. Определение границ устойчивости глиссирования килеватых пластин.- Техн. отчеты ЦАГИ, вып. 202, I96I.

42. Коврижных Л.Д. Устойчивость глиссирования плоскокилеватой пластины на неполной ширине.- Труды ЦАГИ, вып. I972, I978.

43. Тихонов А.И. Гидродинамические силы, действующие на плоскокилеватые пластины при неустановившемся глиссировании. Сборник работ по гидродинамике.- БНИ ЦАГИ, I959.

44. Коврижных Л.Д. Характеристики плоскокилеватой пластины, глиссирующей в режиме "треугольника", при вертикальных гармонических колебаниях.- Труды ЦАГИ, вып. I963, I978.

45. Гребешов Э.П., Сагоян О.А. Гидродинамические характеристики колеблющегося крыла, выполняющего функции несущего элемента и движителя.- Труды ЦАГИ, вып. I725, I976.

46. Коврижных Л.Д. Вопросы глиссирования килеватых тел. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н., МФТИ, I978.

47. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2, М., I970.

И.С. и Крепс Р.Л. Присоединенные массы тел различной
- Труды ЦАГИ, вып. 635, 1947.
rman Th., The Impact on Seaplane Floats during
ing. NACA Tech. Notes, Oct. 1929, N321.
S.D., The Penetration of a Fluid Surface by Wedge. Stevens
Technology. Experimental Towing Tank Report N321, July 1950,
n M. Fairchild Publication Fund Paper NFF-3, Inst. of The Aer. Sc.
ва Э.П., Корявов П.П., Моисеев Н.Н. Плоские и осесиммет-
автомодельные задачи погружения и соударения струй. -
. XXIII, вып. 2, 1959.
вольская З.Н. Некоторые нелинейные задачи о движении не-
эмой жидкости со свободной поверхностью. Диссертация, МГУ,
vol'skaya Z. N., On some problems of Similarity
of Fluid with a Free Surface. Journal of Fluid Mech.,
36, part 4, pp. 805-829, 1969.
ов Г.К. К теории нестационарного глиссирования движения
малого удлинения.- Труды ЦАГИ, вып. 806, 1960.
ин О.П. О перегрузках, действующих на клин при симмет-
и погружении его в жидкость.- Труды ЦАГИ, вып. 797, 1960.
ин С.И. Экспериментальные исследования погружения профи-
жидкость.- Труды ЦАГИ, вып. 807, 1960.
А.Б., Соколянский В.П. Погружение слабокилеватого сим-
чного профиля в жидкость.- Ученые записки ЦАГИ, т. V,
1974.
кий А.С. Посадка гидросамолетов.- Труды ЦАГИ, вып. 423,
ов В.И. Курс высшей математики. Т. - II. изд. 21-ое. -М.:
, гл. III, § 8, 1974.
ien W., Zum Landestoss von Seeflugzeugen.
M 1934, B14, Heft 4, S. 251.
ев Д.К. Заметка о давлении, производимом потоком неогра-
ной ширины на две стенки, сходящиеся под каким бы то ни
углом.- Ж.Русск.физ-хим. общество, т. XIII, 1881.
Г. Гидродинамика.-М.-Л.: ОГИЗ ГОСТЕХИЗДАТ, № 78, 1947.
вич М.И. Теория струй идеальной жидкости.- М.: Наука, изд.
1979.
ов Е.А. Симметричное струйное обтекание клина со скулами
ком идеальной невесомой жидкости: Сборник работ по гидро-
мике. - БНИИ ЦАГИ, 1959.

Оглавление

Св. план, 1984, (доп.), поз.99

Андрей Борисович Лотов

ГЛИССИРОВАНИЕ И БЫСТРЫЙ ВХОД ТЕЛ В ВОДУ

Редактор И.А.Михеева

Подписано в печать 24.08.84 г. Л – 83289. Формат 60x90 I/16.
Бумага писчая № I. Печ.л. 6,75. Уч.-изд.л. 6.75. Тираж 500 экз.
Заказ № 474. Цена 20 к.

Редакционно-издательский отдел
Московского ордена Трудового Красного Знамени
физико-технического института

Ротапринт МФТИ
141700, Моск. обл., г.Долгопрудный, Институтский пер., 9